

۵-۲ نیروی هیدروستاتیکی مؤثر بر سطوح تخت

برای طراحی مخزن‌ها، نیروی هیدروستاتیکی وارده از سیال داخل مخزن بر سطوح مخزن را باید در نظر گرفت. به عنوان مثال، مخزنی را در نظر بگیرید که تا عمق H آب دارد و مساحت کف افقی آن A_b است. نیروی مؤثر بر کف مخزن چنین است: $F_b = \gamma H A_b$. اگر کف مخزن افقی نباشد، برای تعیین نیروی مؤثر بر آن، محاسبات اضافی نیاز است.

۵-۲ نیروی هیدروستاتیکی مؤثر بر سطوح تخت

$$p_2 - p_1 = -\gamma(z_2 - z_1)$$

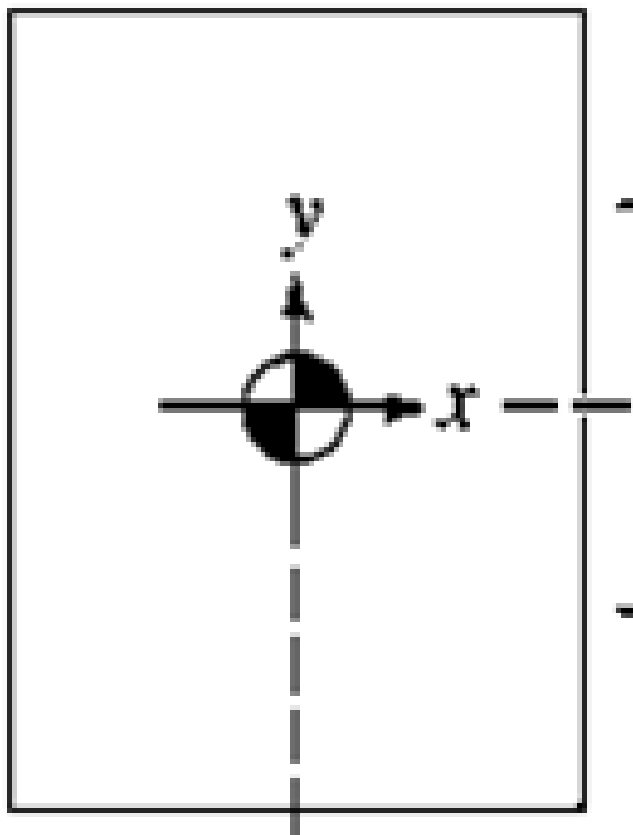
(۱۴-۲)

طبق معادله (۱۴-۲)، فشار وارده از یک سیال تراکم‌ناپذیر بر سطح غوطه‌ور در آن سیال برحسب عمق به صورت خطی تغییر می‌کند. توزیع فشار هیدروستاتیکی در یک سطح تخت دقیقاً مانند توزیع تنش حاصل از اثر ترکیبی خمش - فشار در یک تیر است. به همین دلیل، برای حل مسائل هیدروستاتیکی، از فرمول‌های ساده‌ای که شامل مرکزوار^۱ و ممان اینرسی سطح است استفاده می‌شود:

۱. مرکز سطح نیز به آن می‌گویند.

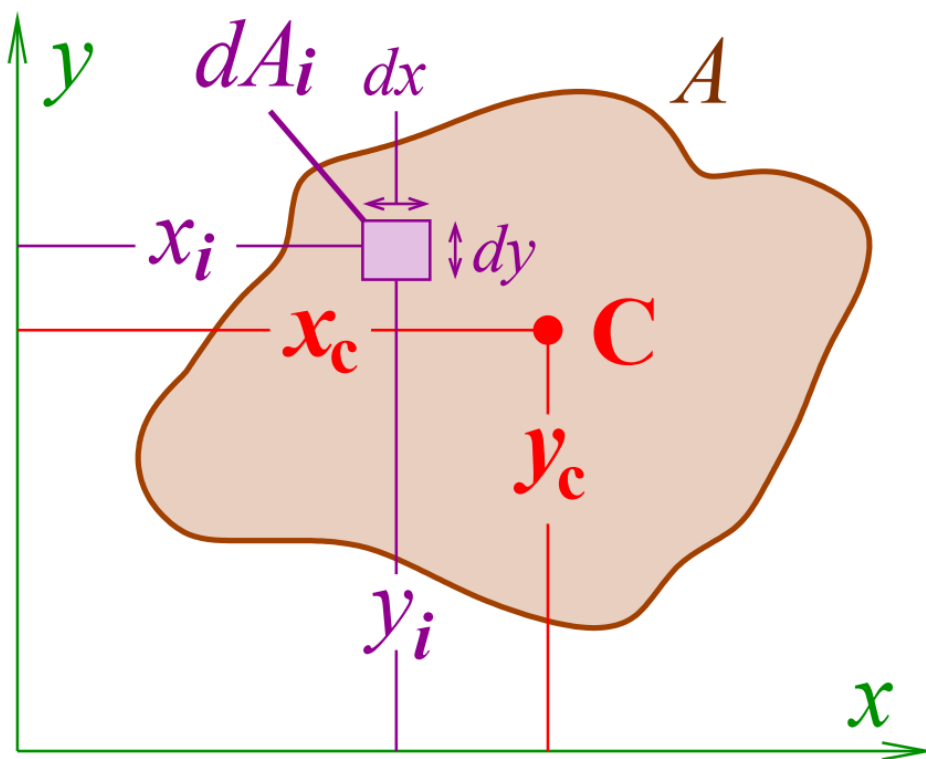
تعریف مرکز هندسی

اگر صفحه ای با شکل منظم داشته باشیم، مرکز هندسی آن، در محل تلاقی خطوط تقارن است



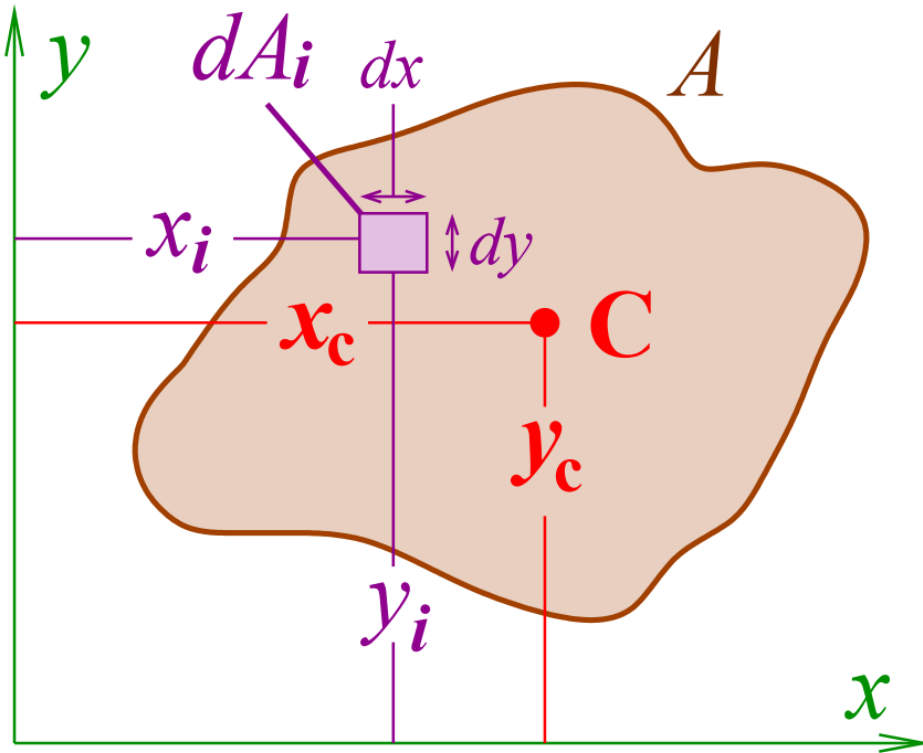
تعریف مرکز هندسی

سطح A را در نظر بگیرید



تعریف مرکز هندسی

مختصات مرکز هندسی:

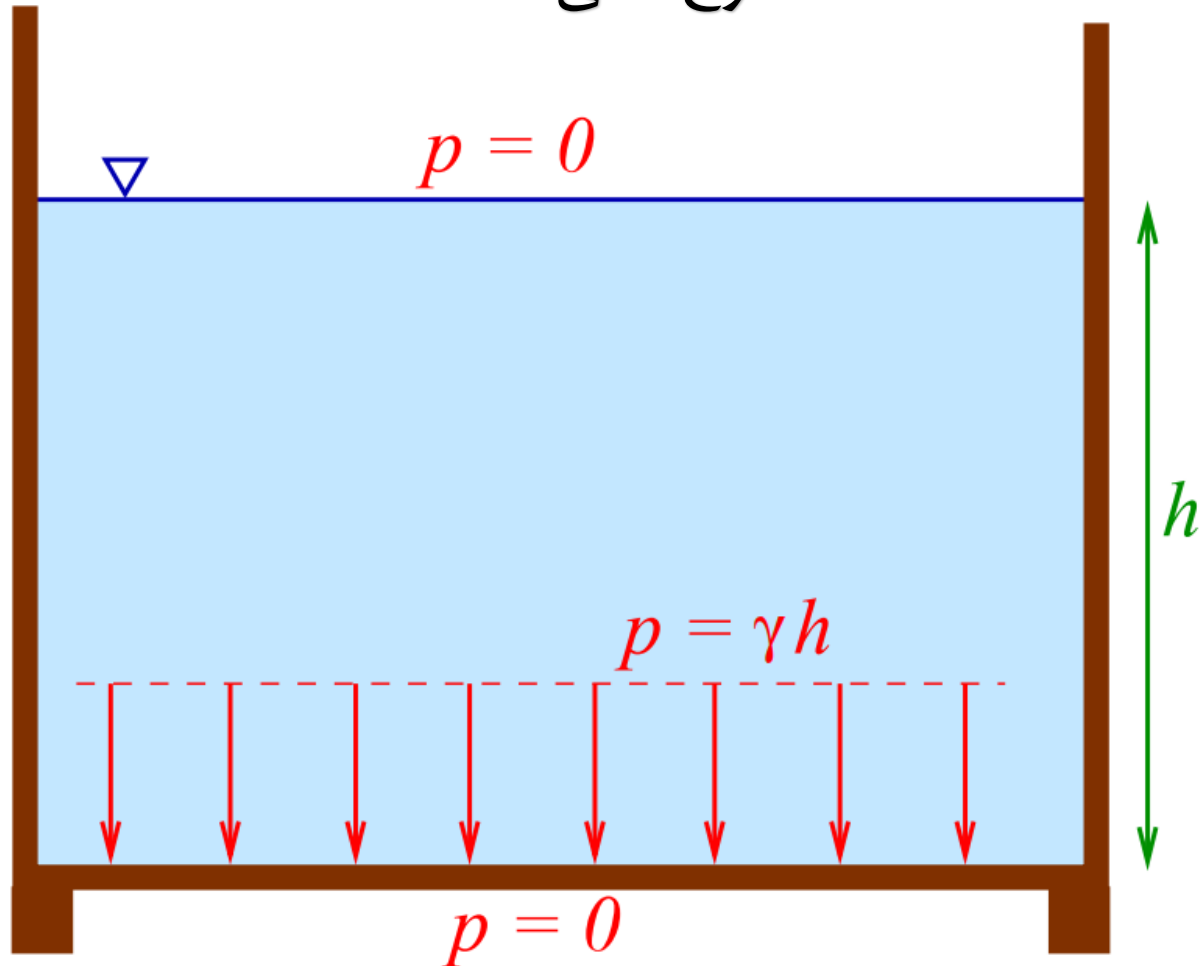


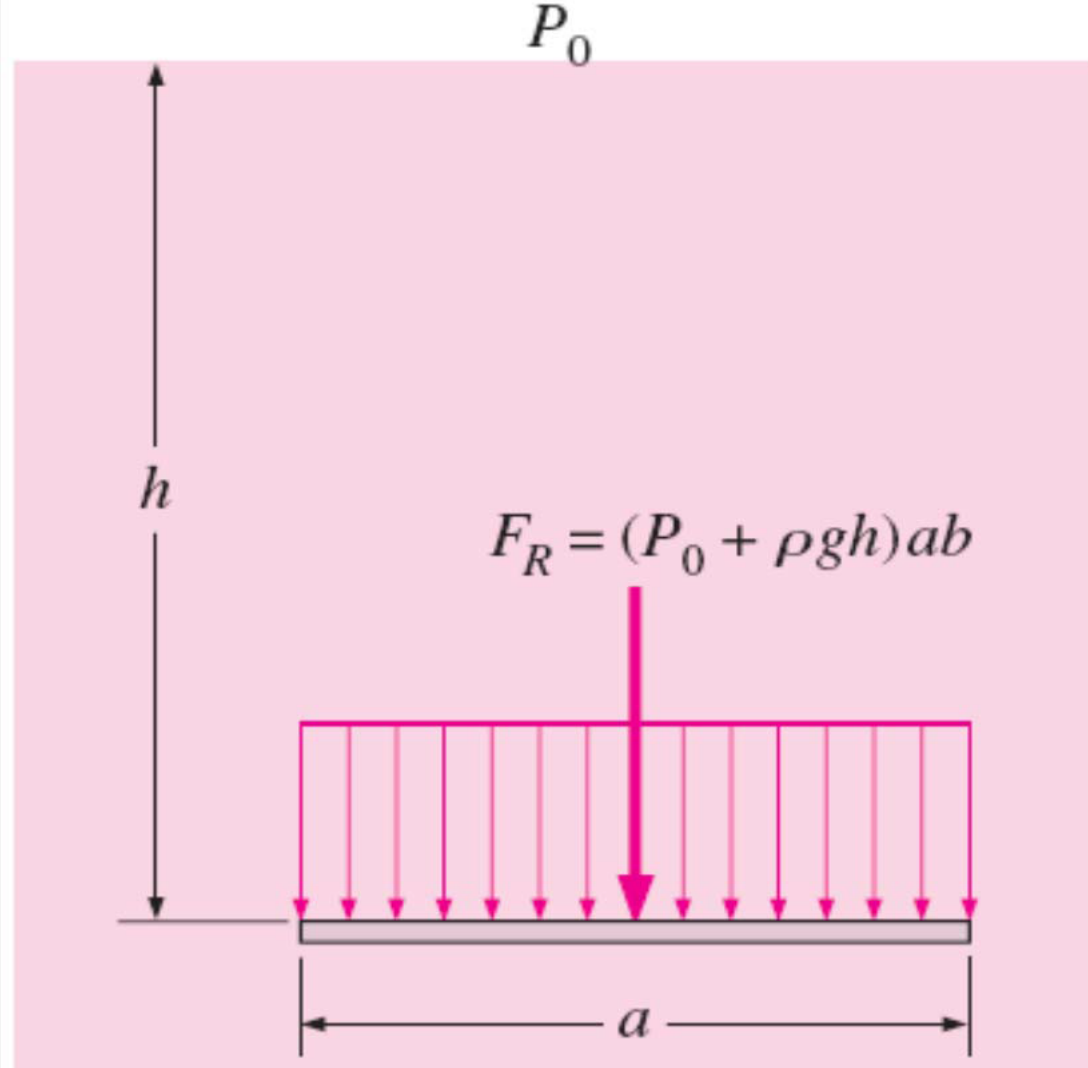
$$x_c = \frac{\sum_i x_i dA_i}{\sum_i dA_i} = \frac{\iint_A x dx dy}{A}$$

$$y_c = \frac{\sum_i y_i dA_i}{\sum_i dA_i} = \frac{\iint_A y dx dy}{A}$$

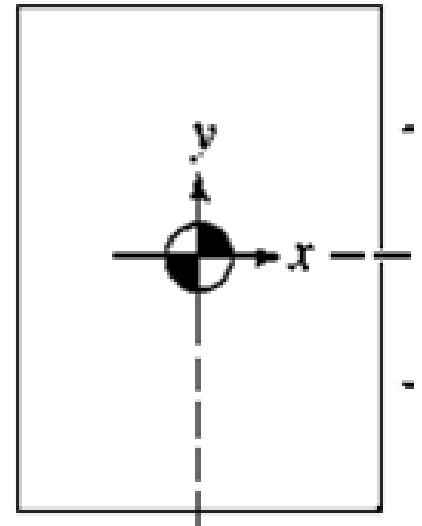
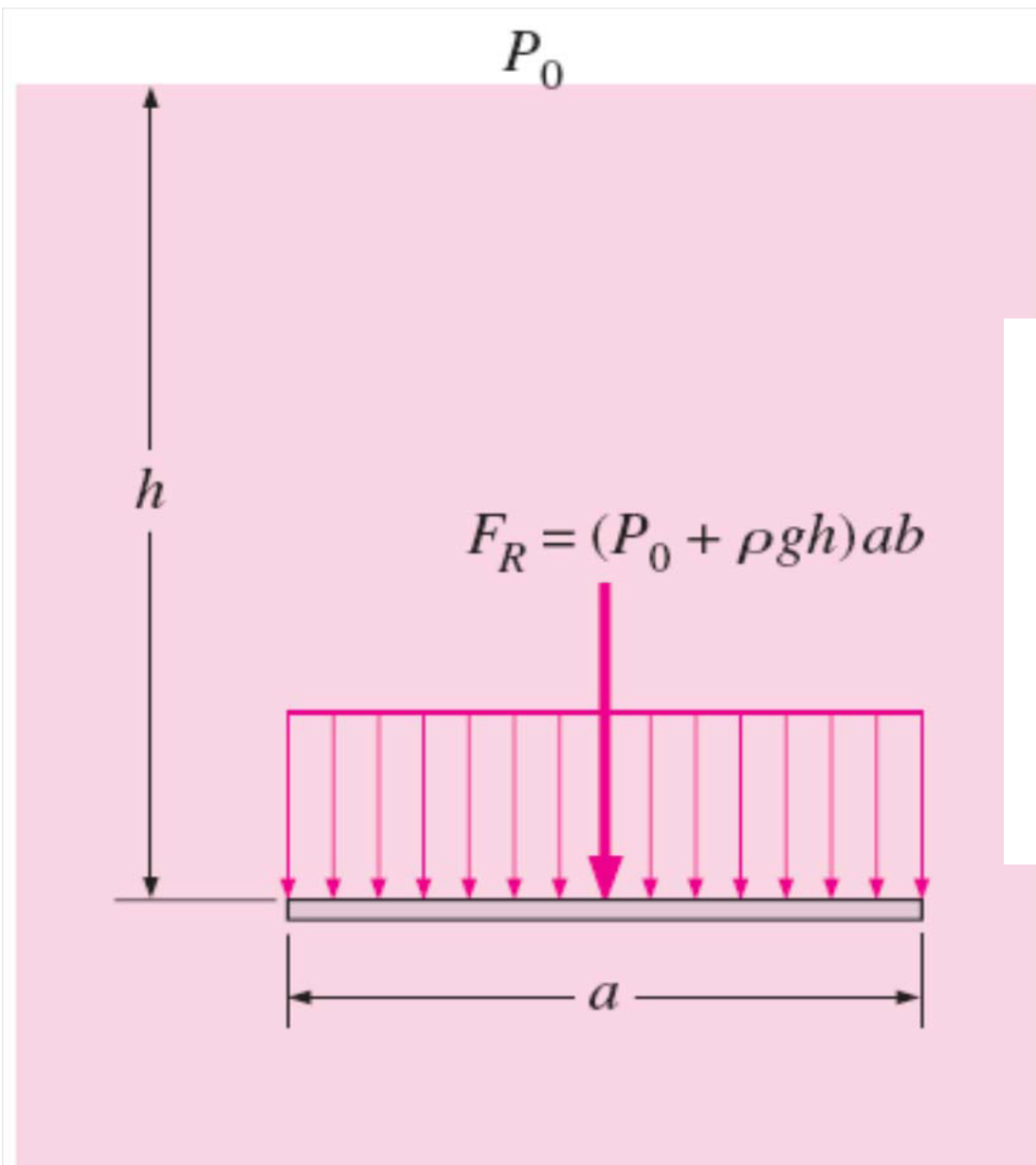
۵-۲ نیروی هیدروستاتیکی
مؤثر بر سطوح تخت

۱- سطوح افقی

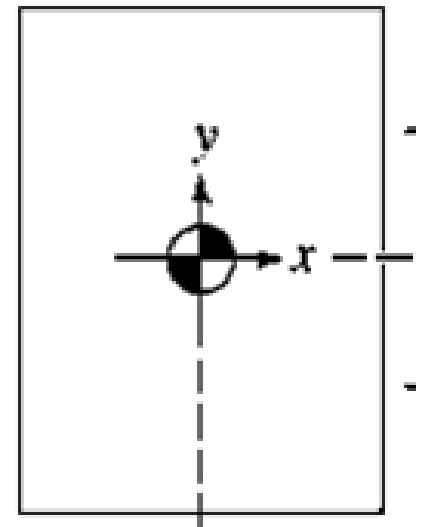
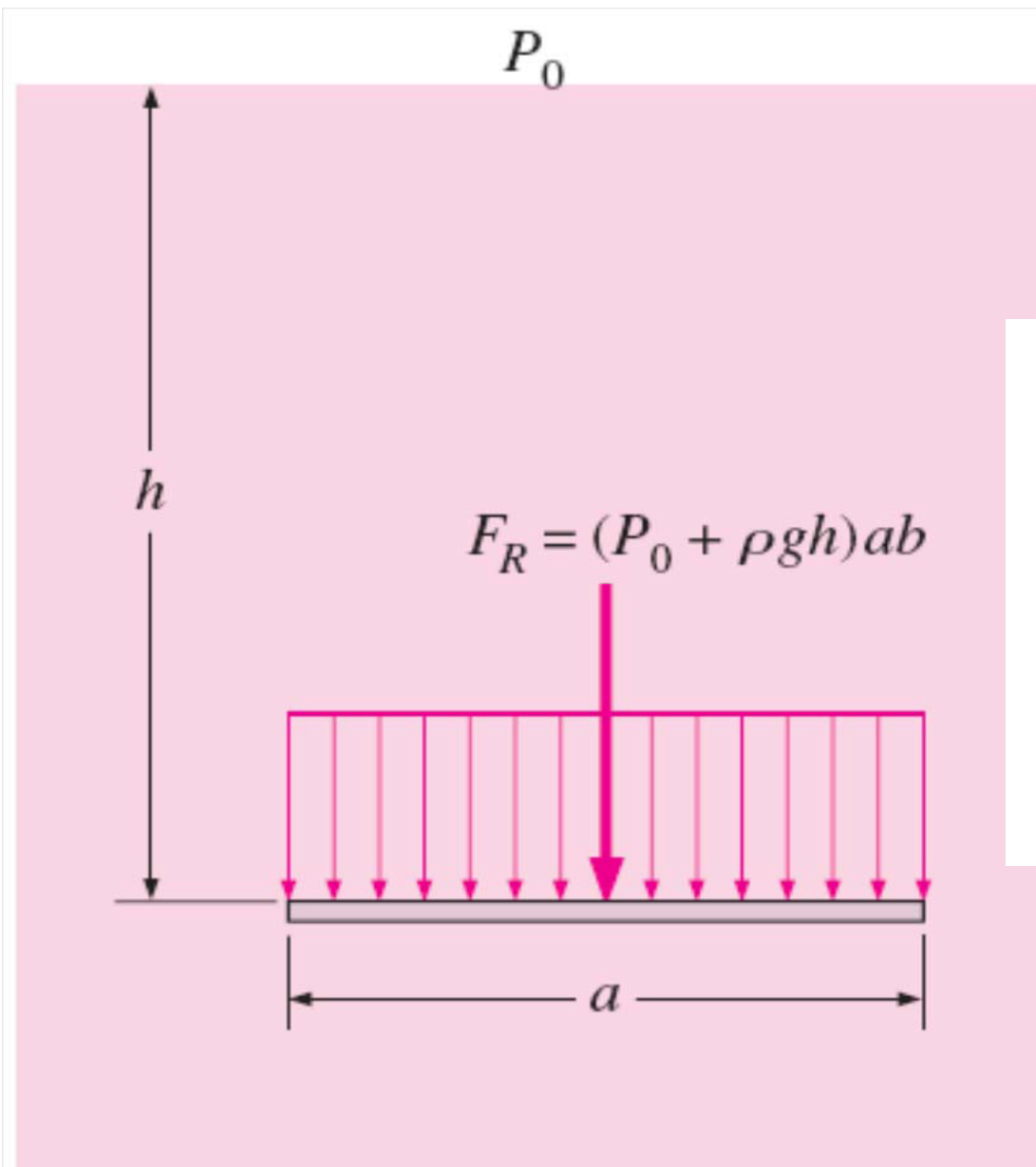




Horizontal rectangular plate: $F_R = (P_0 + \rho gh)ab$



Horizontal rectangular plate: $F_R = (P_0 + \rho gh)ab$

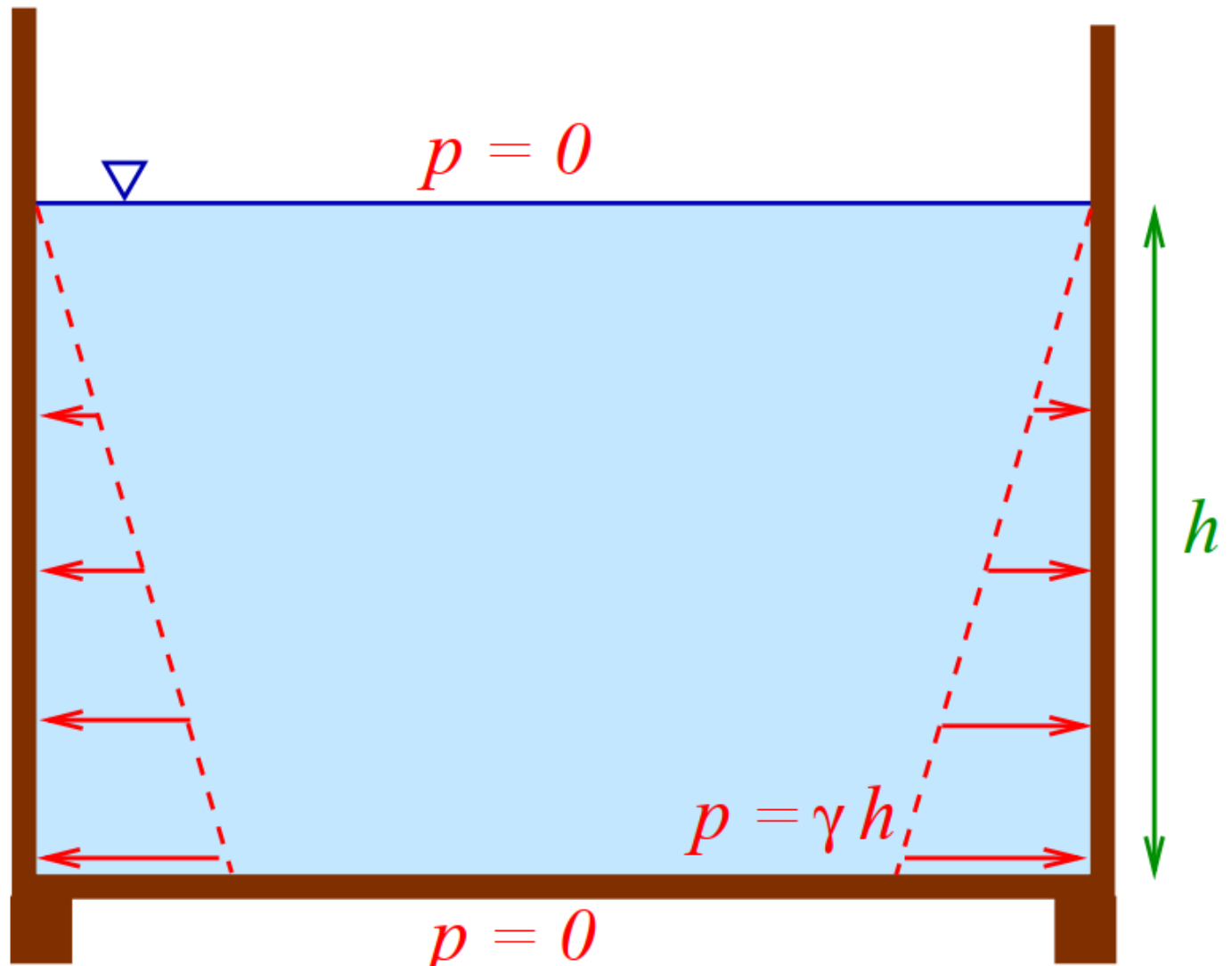


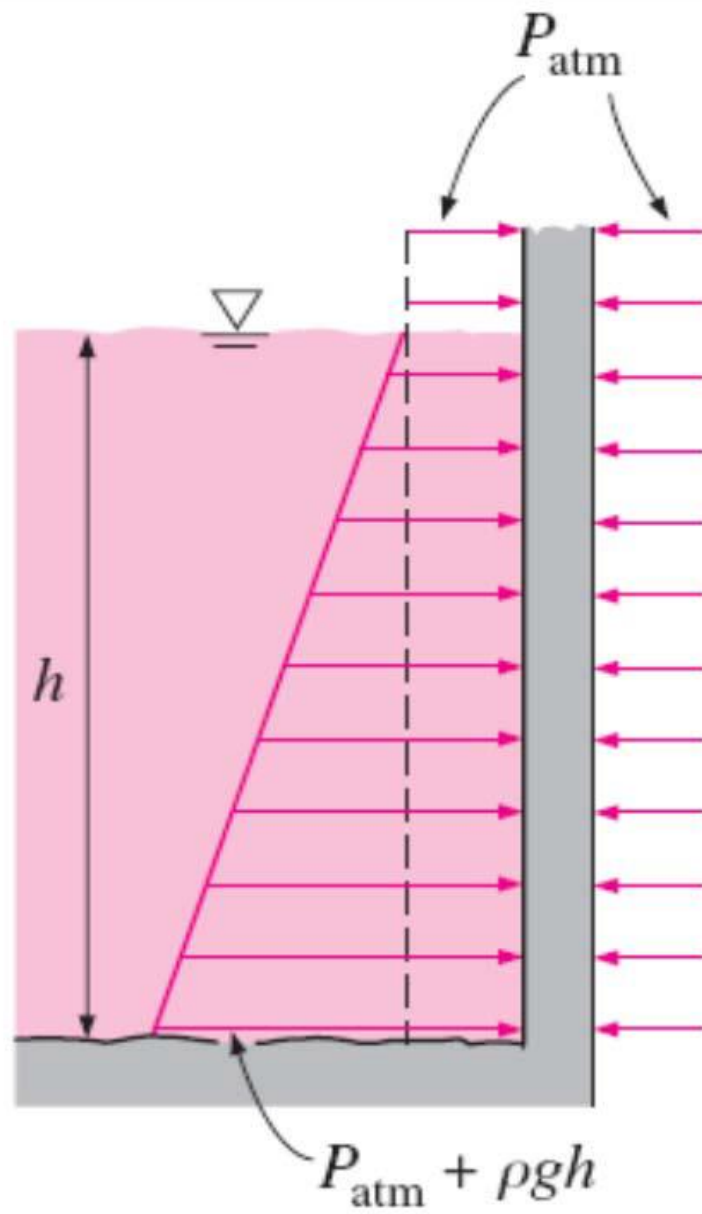
Resultant
force:
 $F = p_{CG} A$

Horizontal rectangular plate: $F_R = (P_0 + \rho gh)ab$

2.5 Hydrostatic Forces on Plane Surfaces

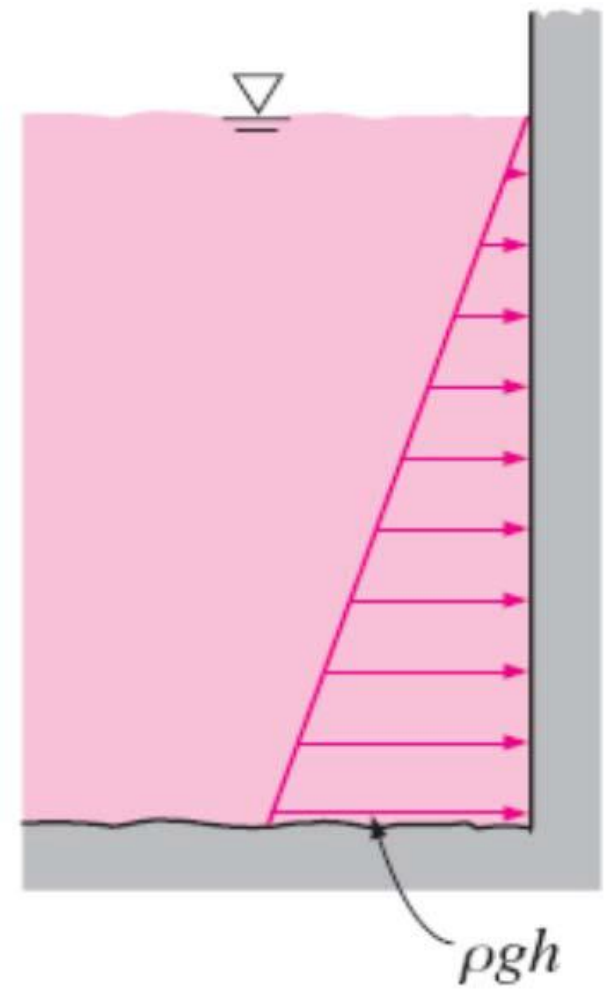
۲- سطوح عمودی



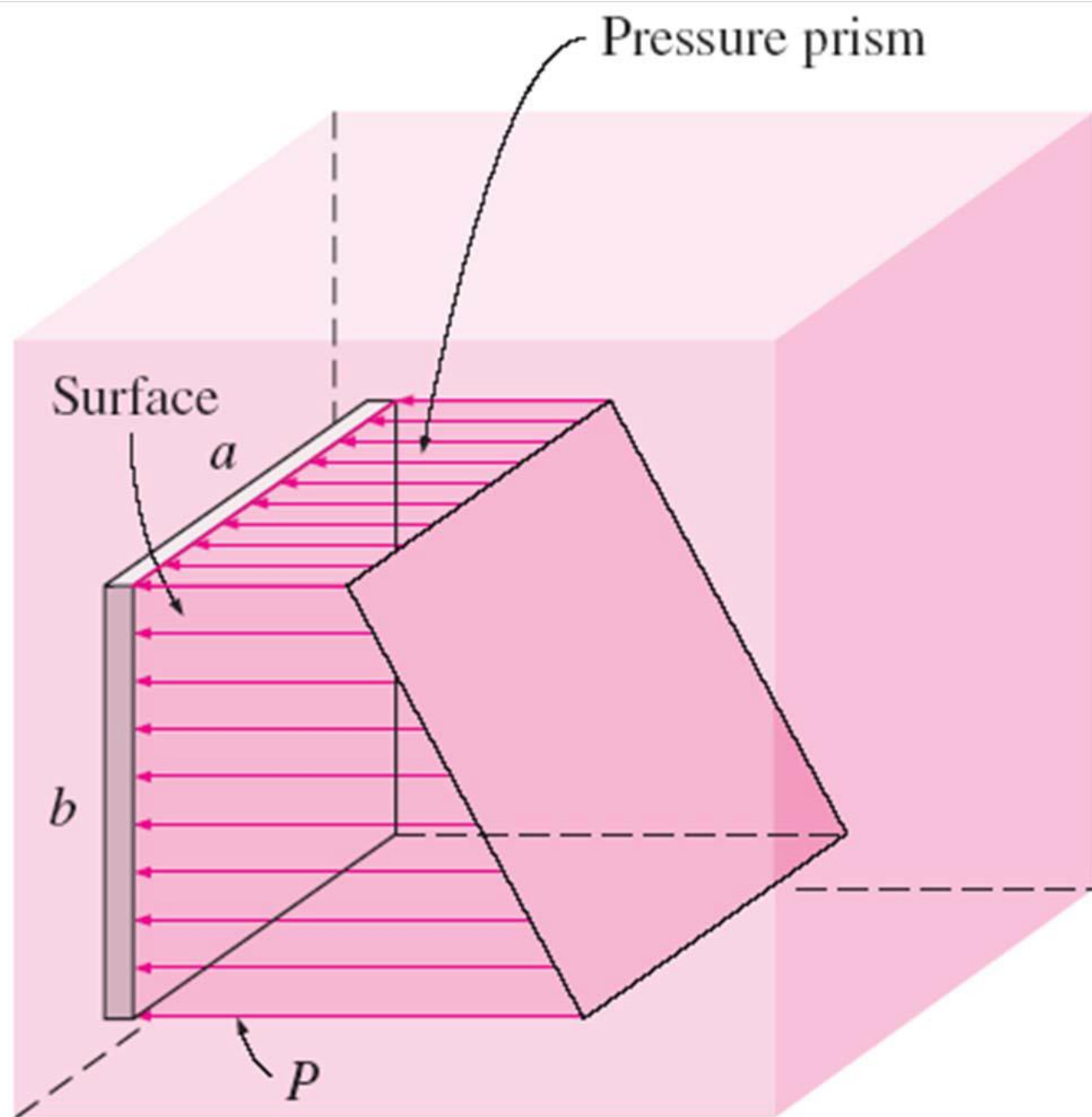


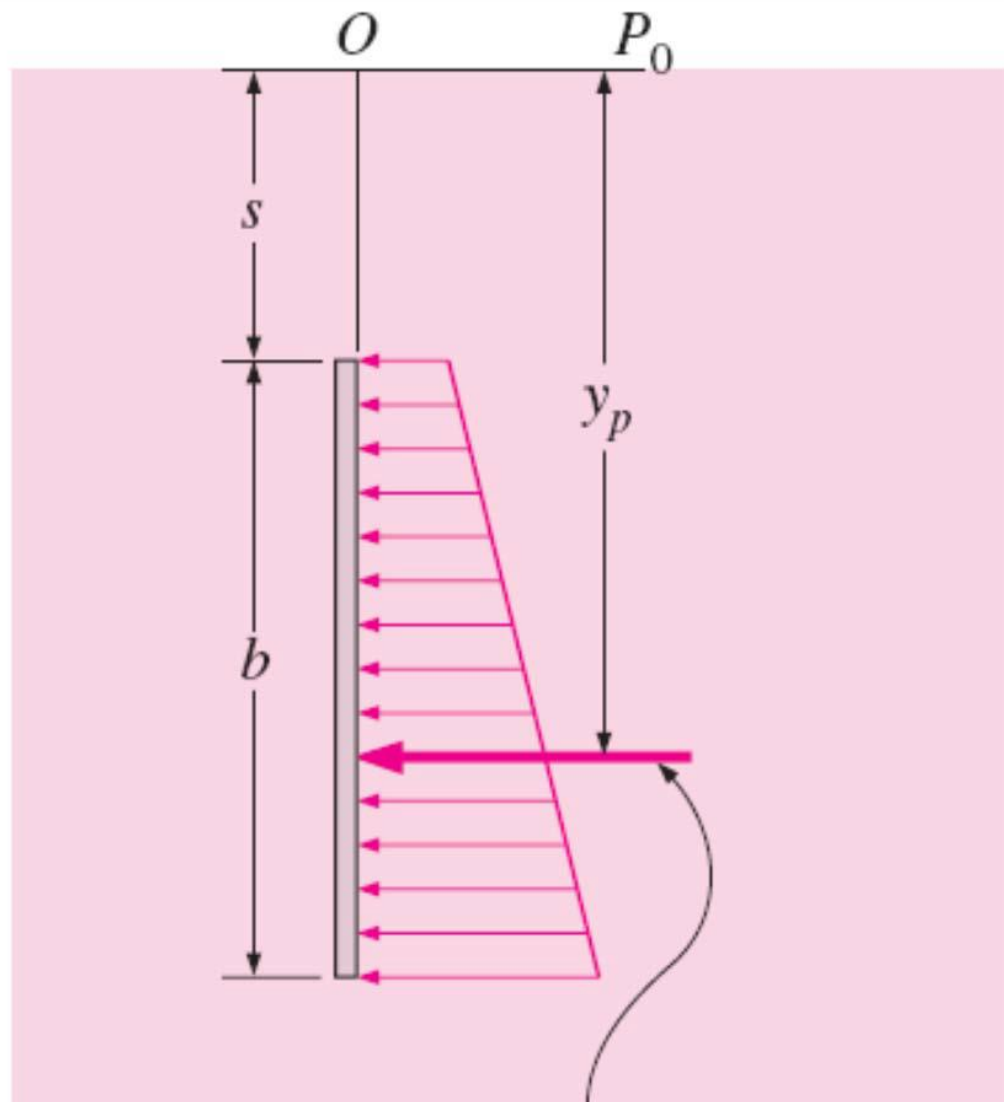
(a) P_{atm} considered

$\equiv$



(b) P_{atm} subtracted



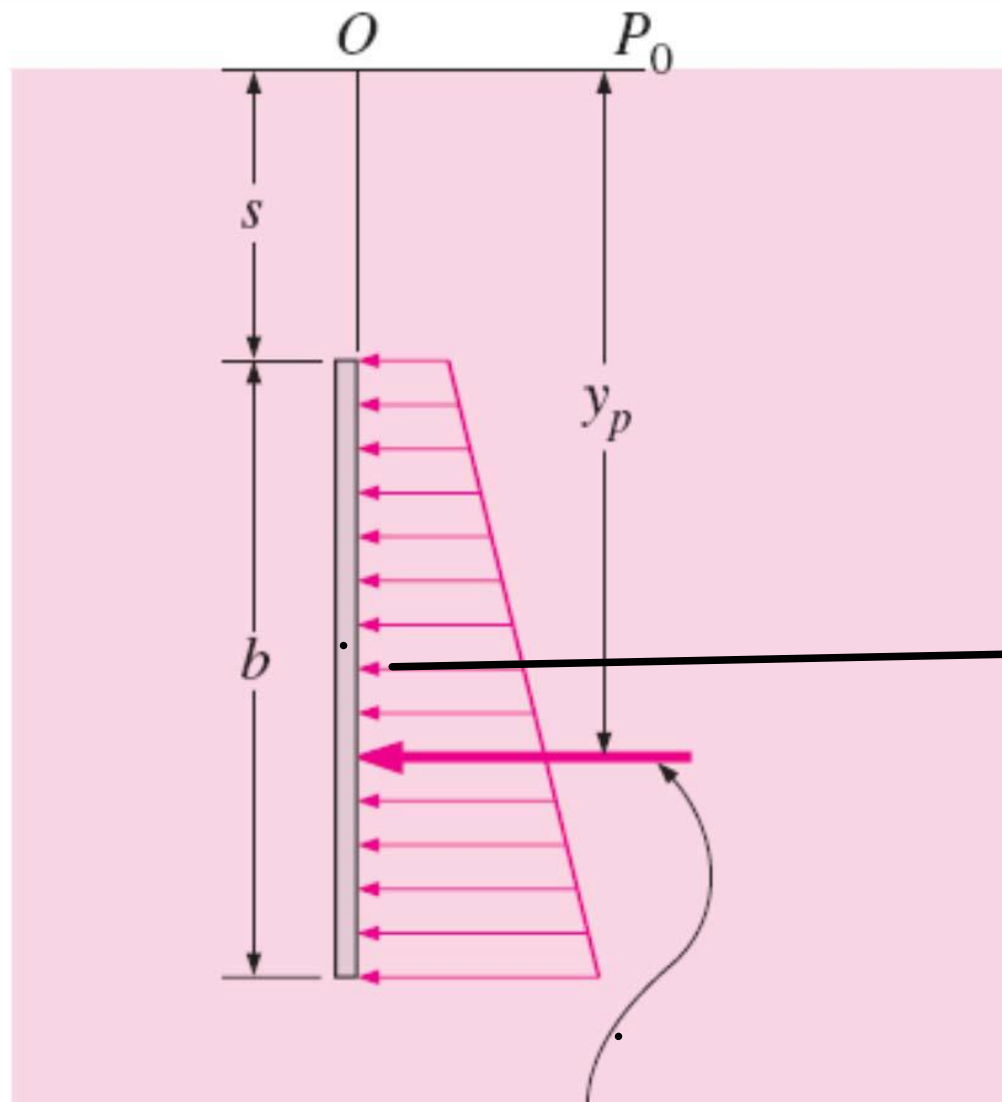


Vertical rectangular plate:

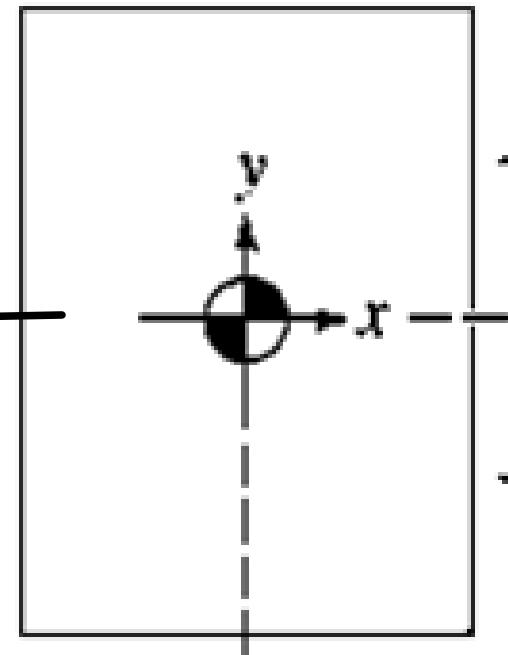
$$F_R = [P_0 + \rho g(s + b/2)]ab$$

Vertical rectangular plate ($s = 0$):

$$F_R = (P_0 + \rho gb/2)ab$$



Resultant
force:
 $F = p_{CG} A$

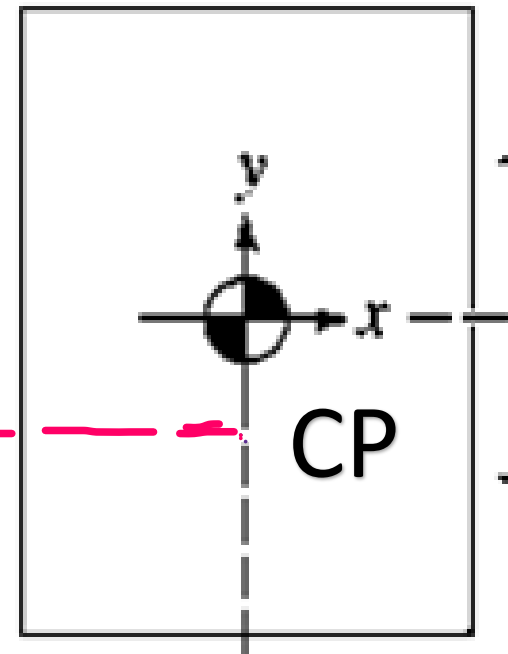
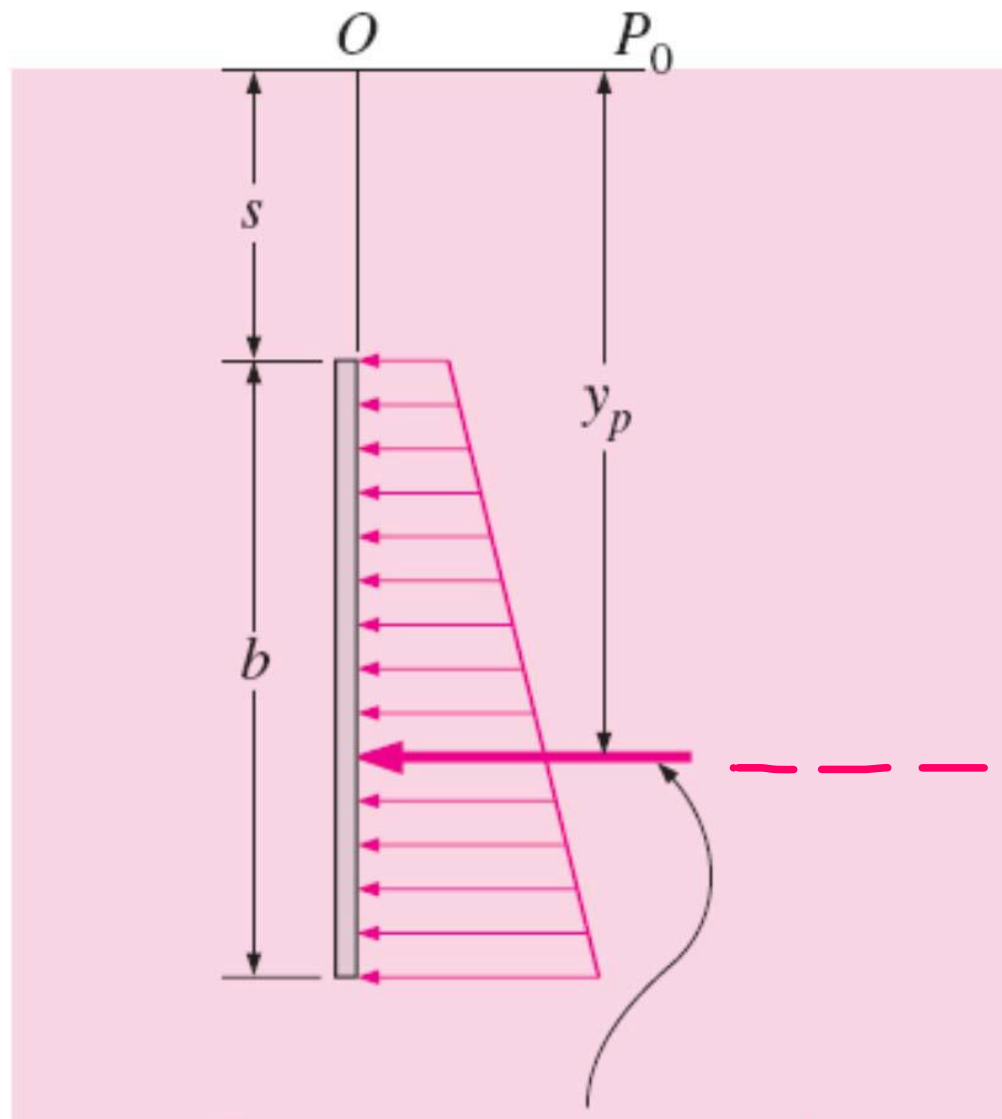


Vertical rectangular plate:

$$F_R = [P_0 + \rho g(s + b/2)]ab$$

Vertical rectangular plate ($s = 0$):

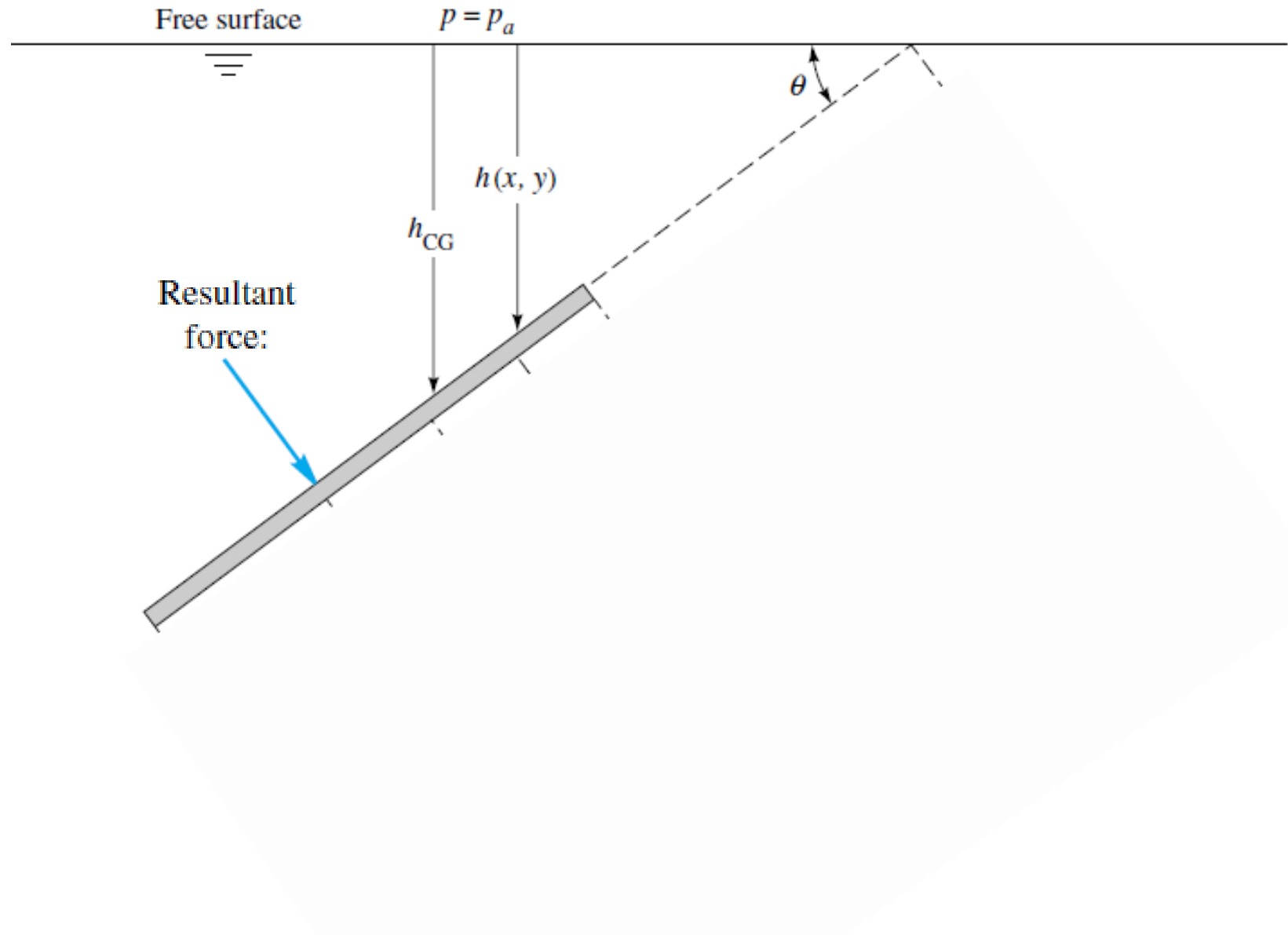
$$F_R = (P_0 + \rho gb/2)ab$$



Vertical rectangular plate ($s = 0$):

$$F_R = (P_0 + \rho gb/2)ab$$

۳- سطوح زاویه دار



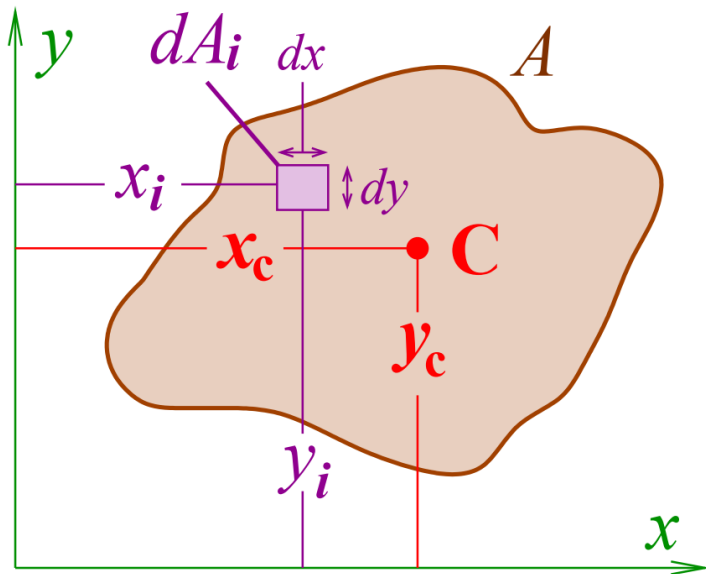
تعریف گشتاور اول سطح

قبلا گشتاور نیرو را به صورت نیرو * فاصله از محور تعریف کردیم

تعریف گشتاور اول سطح

قبلا گشتاور نیرو را به صورت نیرو * فاصله از محور تعریف کردیم

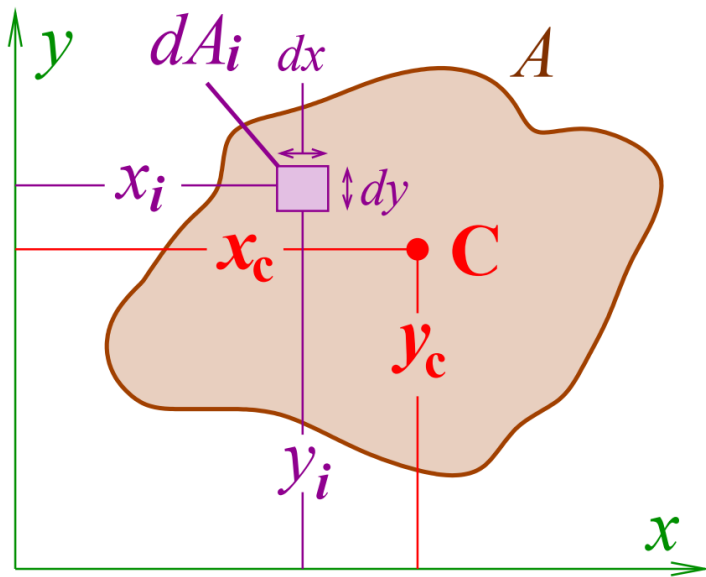
به همین ترتیب، گشتاور اول سطح = مساحت سطح * فاصله از محور



تعریف گشتاور اول سطح

قبلا گشتاور نیرو را به صورت نیرو * فاصله از محور تعریف کردیم

به همین ترتیب، گشتاور اول سطح = مساحت سطح * فاصله از محور



$$Q_y = \sum_i x_i dA_i = \iint_A x \, dx \, dy$$

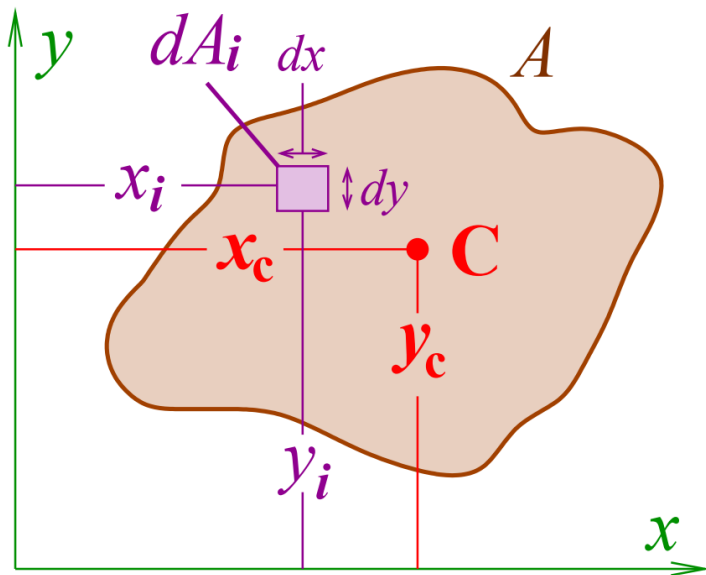
$$Q_y = \iint_A (x - x_c) \, dx \, dy + x_c \iint_A dx \, dy$$

$$Q_y = 0 + x_c \iint_A dx \, dy = x_c A$$

تعریف گشتاور اول سطح

قبلا گشتاور نیرو را به صورت نیرو * فاصله از محور تعریف کردیم

به همین ترتیب، گشتاور اول سطح = مساحت سطح * فاصله از محور



$$Q_y = \sum_i x_i dA_i = \iint_A x \, dx \, dy$$

$$Q_y = \iint_A (x - x_c) \, dx \, dy + x_c \iint_A dx \, dy$$

$$Q_y = 0 + x_c \iint_A dx \, dy = x_c A$$

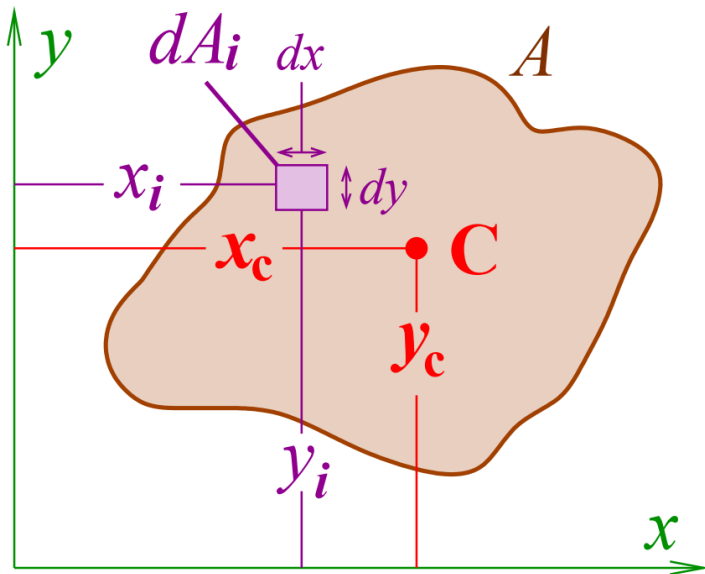
The first moment of area about the x -axis is

$$Q_x = \iint_A y \, dx \, dy = y_c A$$

تعریف گشتاور دوم سطح

گشتاور دوم سطح = مساحت سطح * مجذور (فاصله از محور)

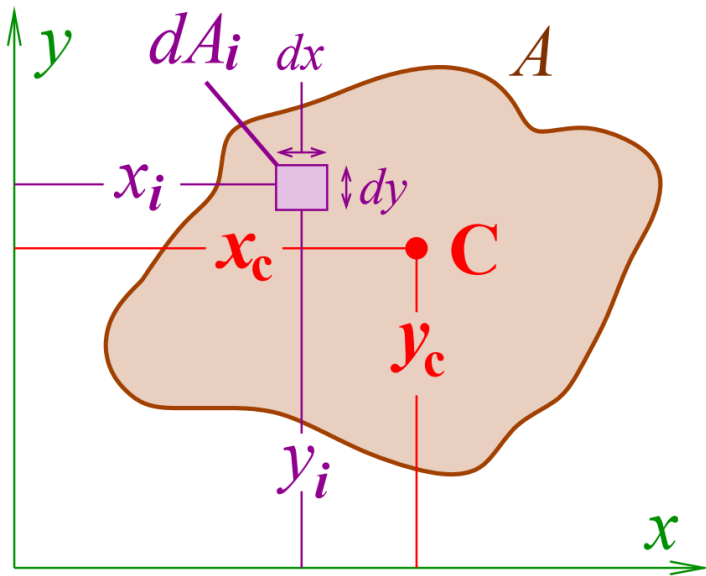
گشتاور دوم سطح یا ممان اینرسی عامل مقاوم در مقابل خمش می باشد و به توزیع ذرات تشکیل دهنده جسم حول محور خمش بستگی دارد.



تعریف گشتاور دوم سطح

گشتاور دوم سطح = مساحت سطح * مجذور (فاصله از محور)

$$I_{xx} = \sum_i y_i^2 dA_i = \iint_A y^2 dx dy$$

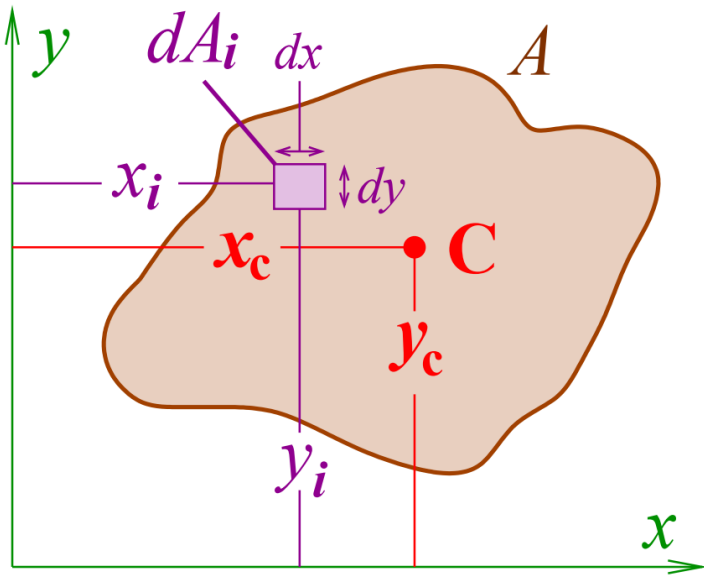


تعریف گشتاور دوم سطح

گشتاور دوم سطح = مساحت سطح * مجذور (فاصله از محور)

$$I_{xx} = \sum_i y_i^2 dA_i = \iint_A y^2 dx dy$$

$$I_{yy} = \sum_i x_i^2 dA_i = \iint_A x^2 dx dy$$



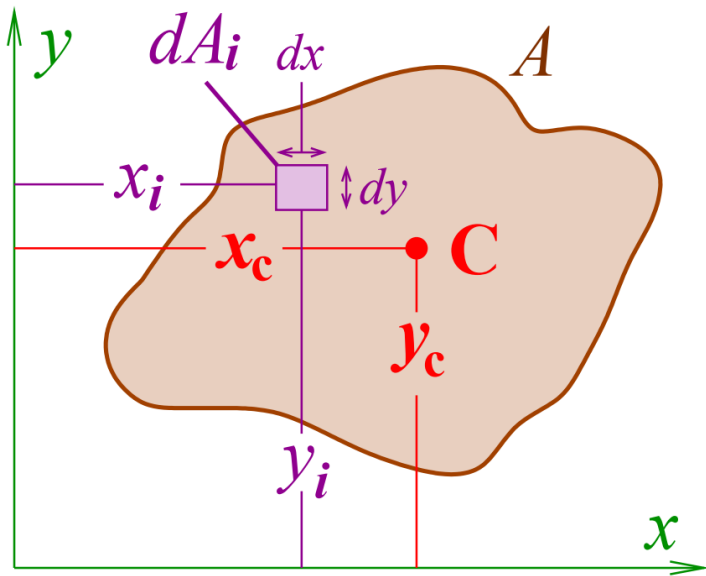
تعریف گشتاور دوم سطح

گشتاور دوم سطح = مساحت سطح * مجذور (فاصله از محور)

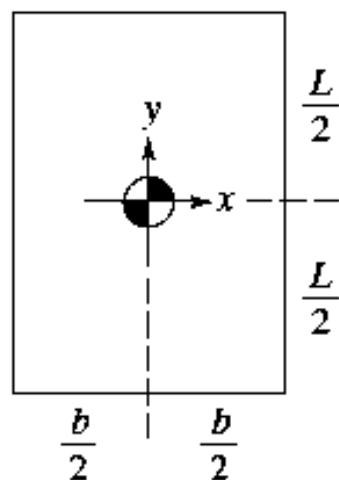
$$I_{xx} = \sum_i y_i^2 dA_i = \iint_A y^2 dx dy$$

$$I_{yy} = \sum_i x_i^2 dA_i = \iint_A x^2 dx dy$$

$$I_{xy} = \sum_i x_i y_i dA_i = \iint_A xy dx dy$$



گشتاور دوم سطح

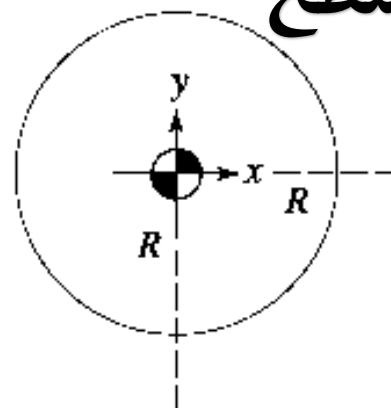


(a)

$$A = bL$$

$$I_{xx} = \frac{bL^3}{12}$$

$$I_{xy} = 0$$

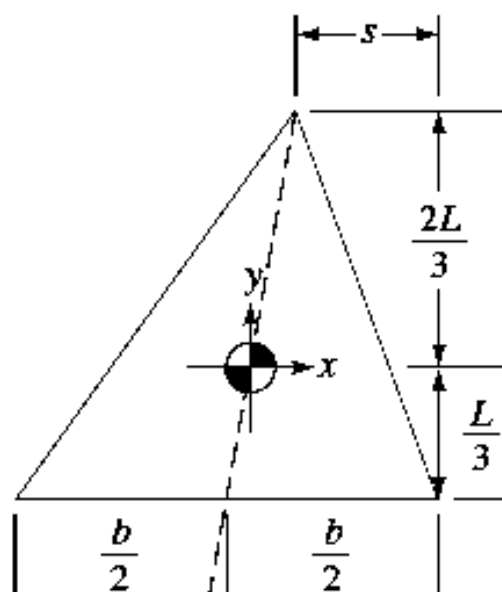


(b)

$$A = \pi R^2$$

$$I_{xx} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_{xy} = 0$$

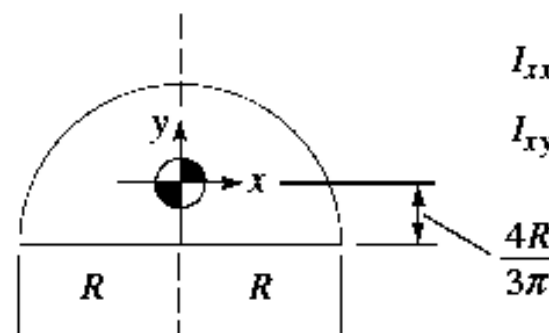


(c)

$$A = \frac{bL}{2}$$

$$I_{xx} = \frac{bL^3}{36}$$

$$I_{xy} = \frac{b(b-2s)L^2}{72}$$



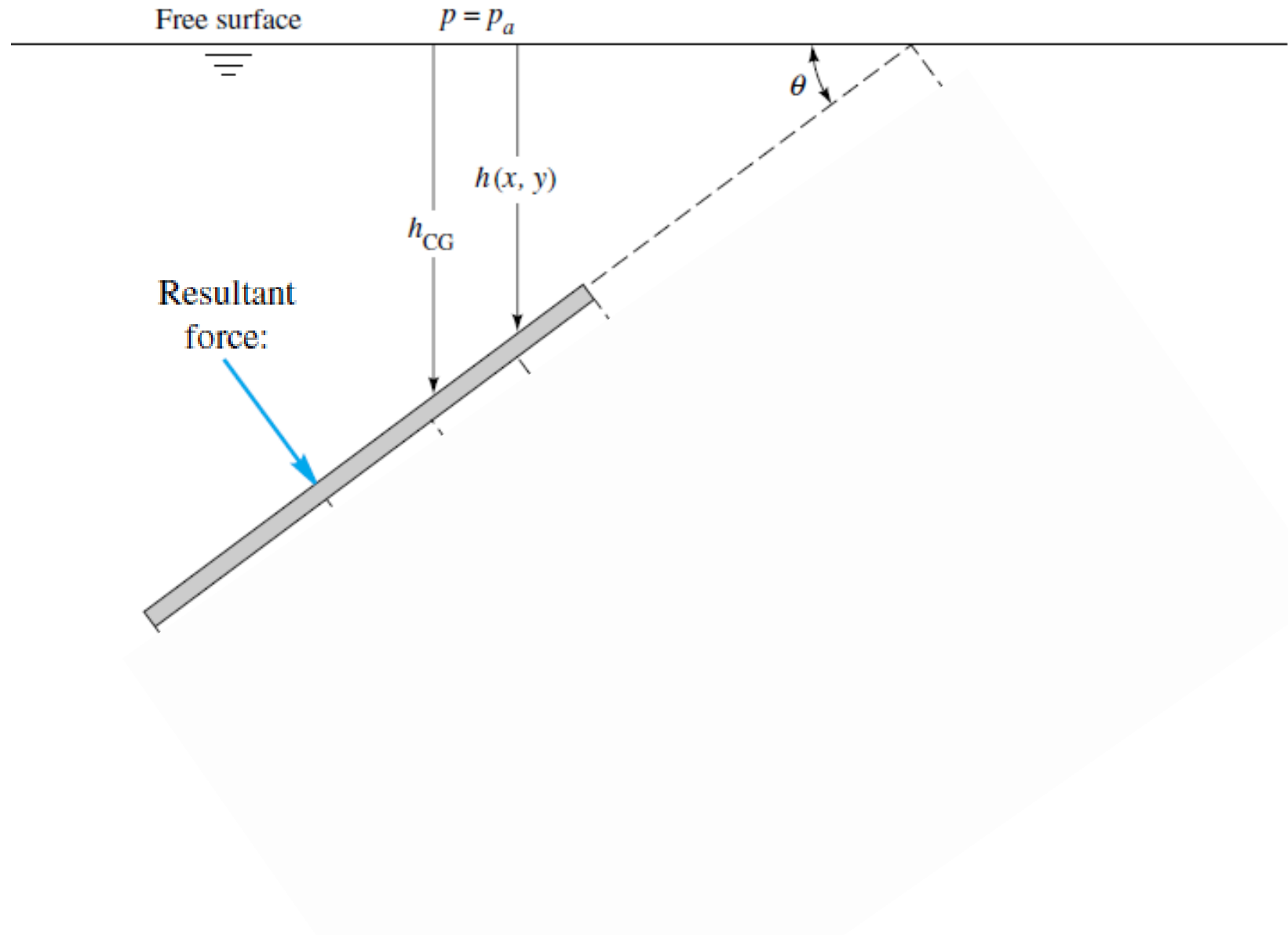
(d)

$$A = \frac{\pi R^2}{2}$$

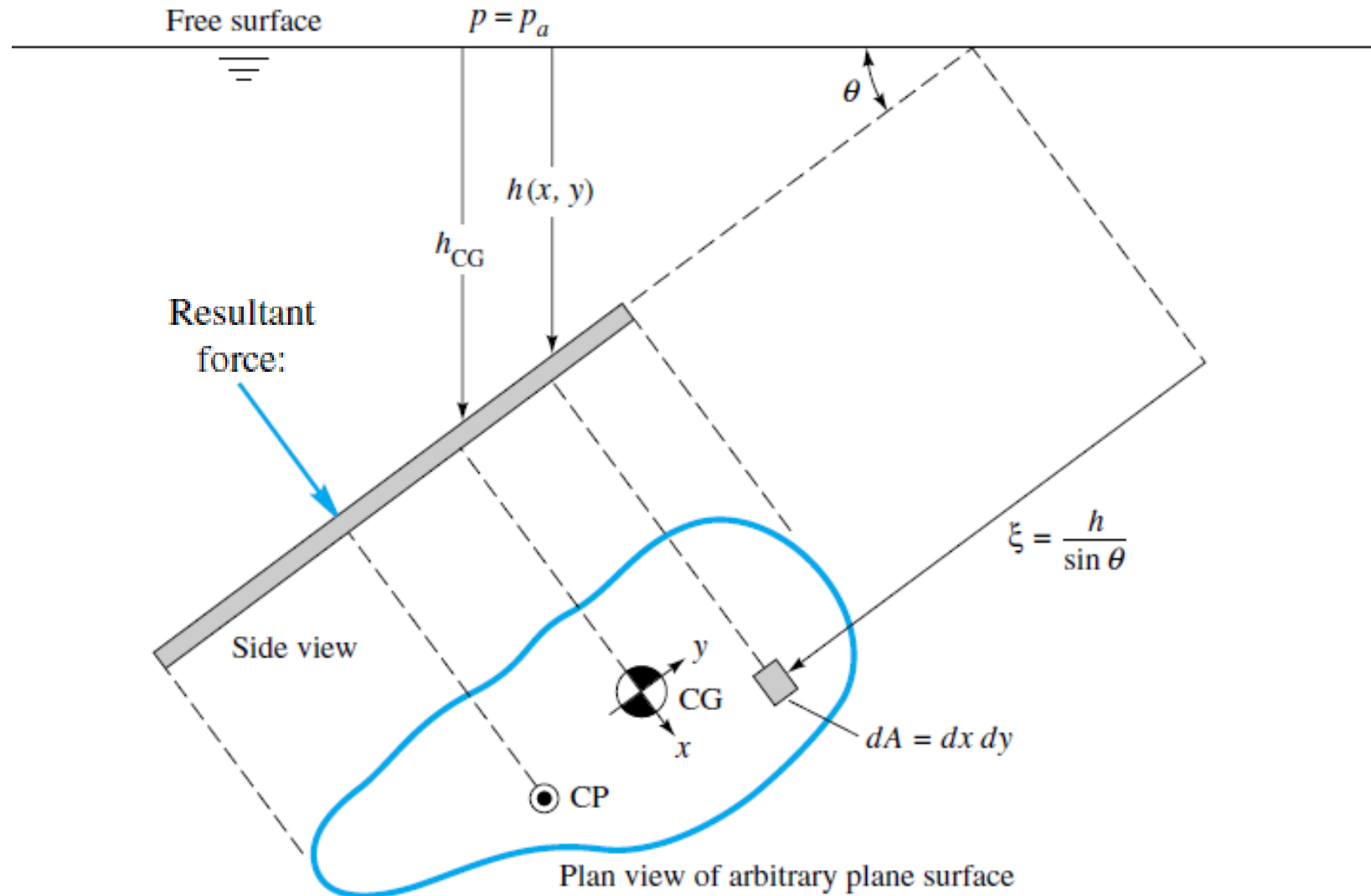
$$I_{xx} = 0.10976R^4$$

$$I_{xy} = 0$$

۳- سطوح زاویه دار

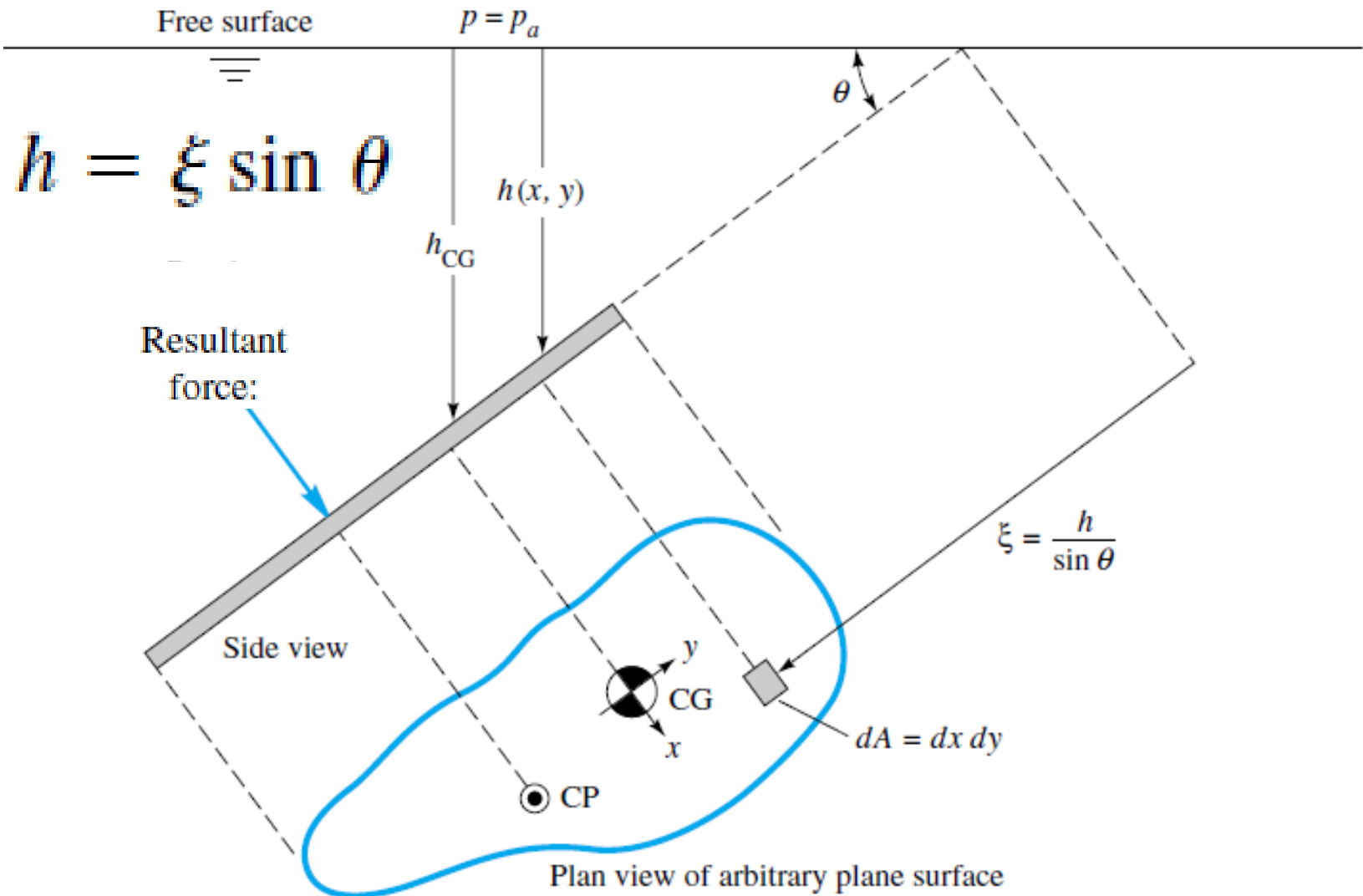


۳- سطوح زاویه دار

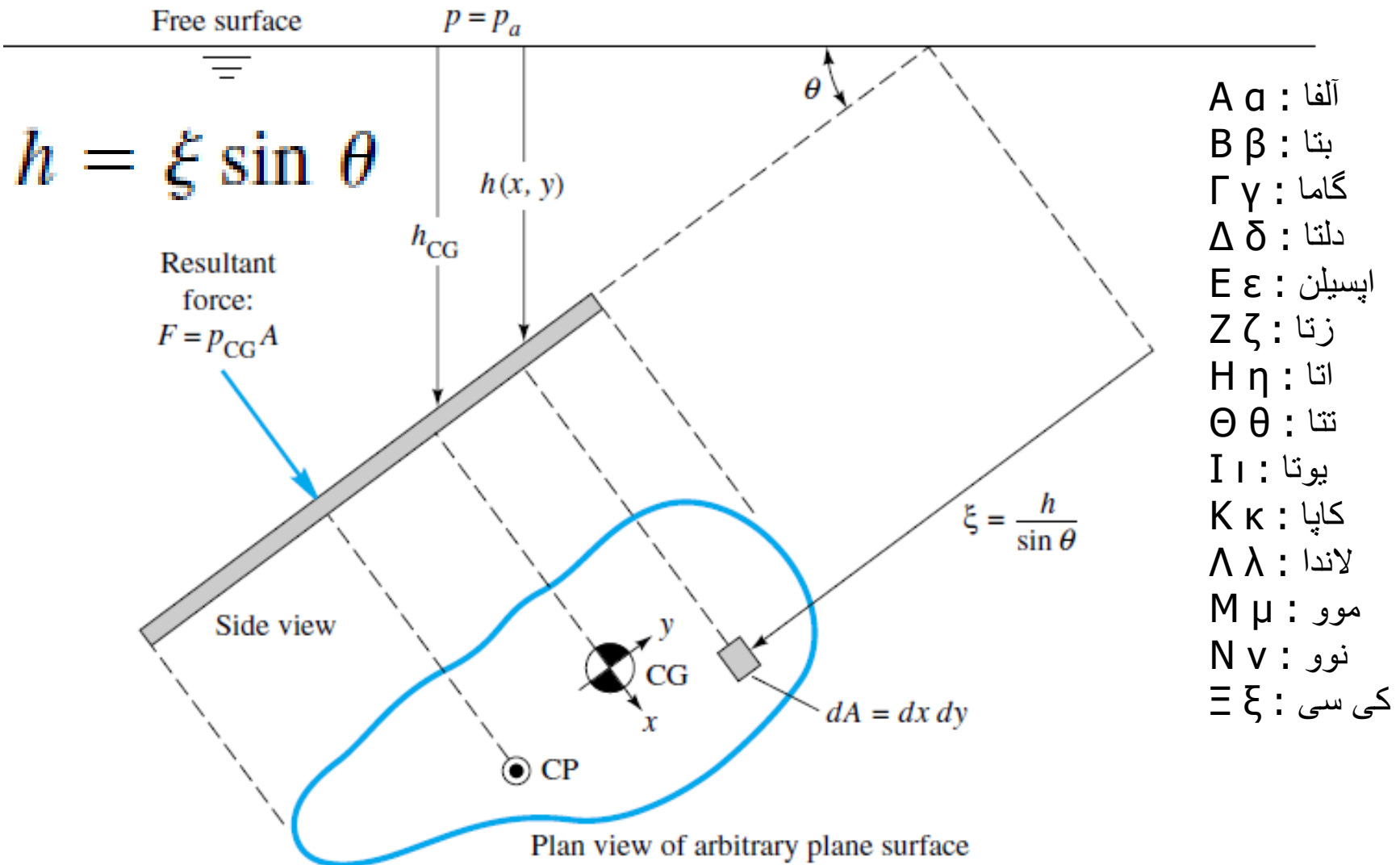


$$F = \int p \, dA = \int (p_a + \gamma h) \, dA = p_a A + \gamma \int h \, dA$$

$$F = \int p \, dA = \int (p_a + \gamma h) \, dA = p_a A + \gamma \int h \, dA$$



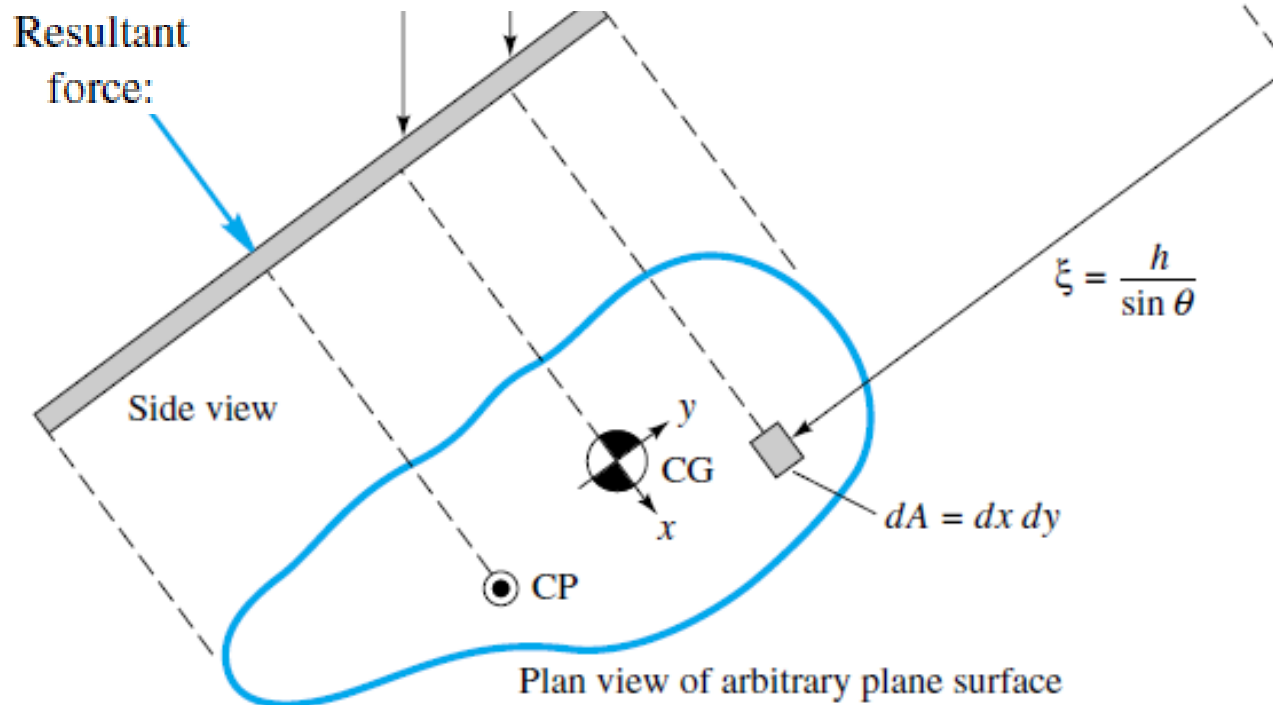
$$F = \int p \, dA = \int (p_a + \gamma h) \, dA = p_a A + \gamma \int h \, dA$$



$$F = \int p \, dA = \int (p_a + \gamma h) \, dA = p_a A + \gamma \int h \, dA$$

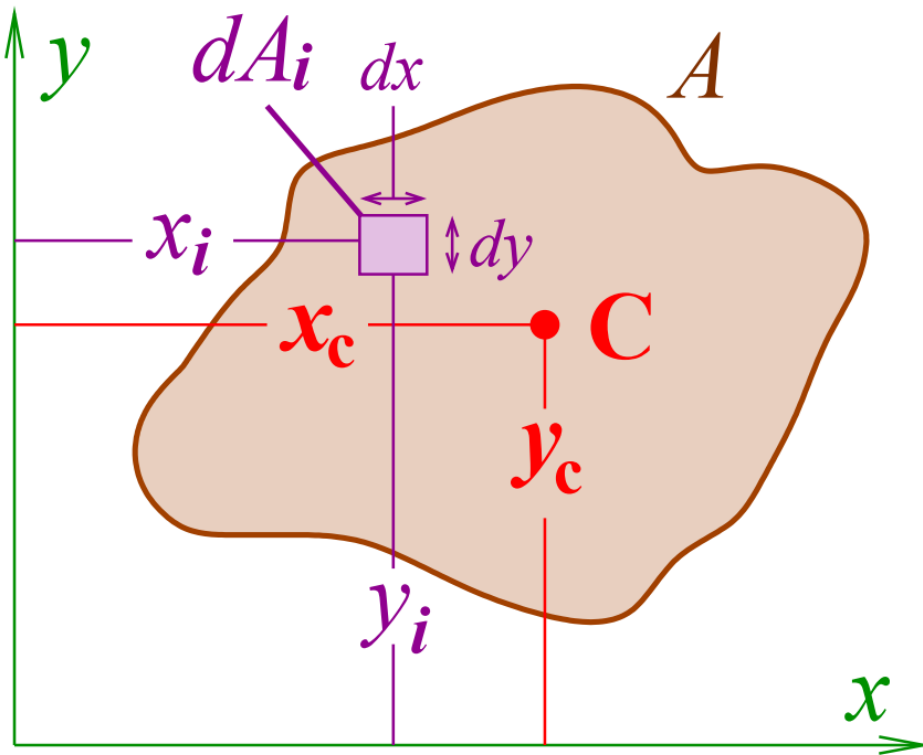
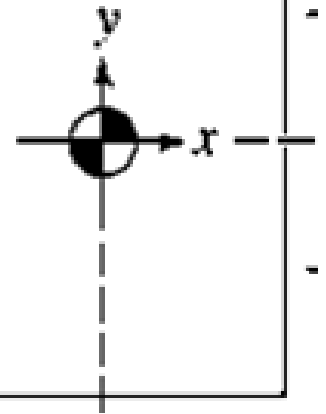
$$h = \xi \sin \theta$$

$$F = p_a A + \gamma \sin \theta \int \xi \, dA$$



تعریف مرکز هندسی

مختصات مرکز هندسی:



$$x_c = \frac{\sum_i x_i dA_i}{\sum_i dA_i} = \frac{\iint_A x dx dy}{A}$$

$$y_c = \frac{\sum_i y_i dA_i}{\sum_i dA_i} = \frac{\iint_A y dx dy}{A}$$

$$F = \int p \, dA = \int (p_a + \gamma h) \, dA = p_a A + \gamma \int h \, dA$$

$$h = \xi \sin \theta$$

$$F = p_a A + \gamma \sin \theta \int \xi \, dA$$

by definition, the centroidal slant distance from the surface to the plate is

$$\xi_{CG} = \frac{1}{A} \int \xi \, dA \quad (2.36)$$

Therefore, since θ is constant along the plate, Eq. (2.35) becomes

$$F = p_a A + \gamma \sin \theta \int \xi \, dA = p_a A + \gamma \sin \theta \, \xi_{CG} A \quad (2.37)$$

$$F = \int p \, dA = \int (p_a + \gamma h) \, dA = p_a A + \gamma \int h \, dA$$

$$h = \xi \sin \theta$$

$$F = p_a A + \gamma \sin \theta \int \xi \, dA$$

ie plate is

$$\xi_{CG} = \frac{1}{A} \int \xi \, dA \quad (2.36)$$

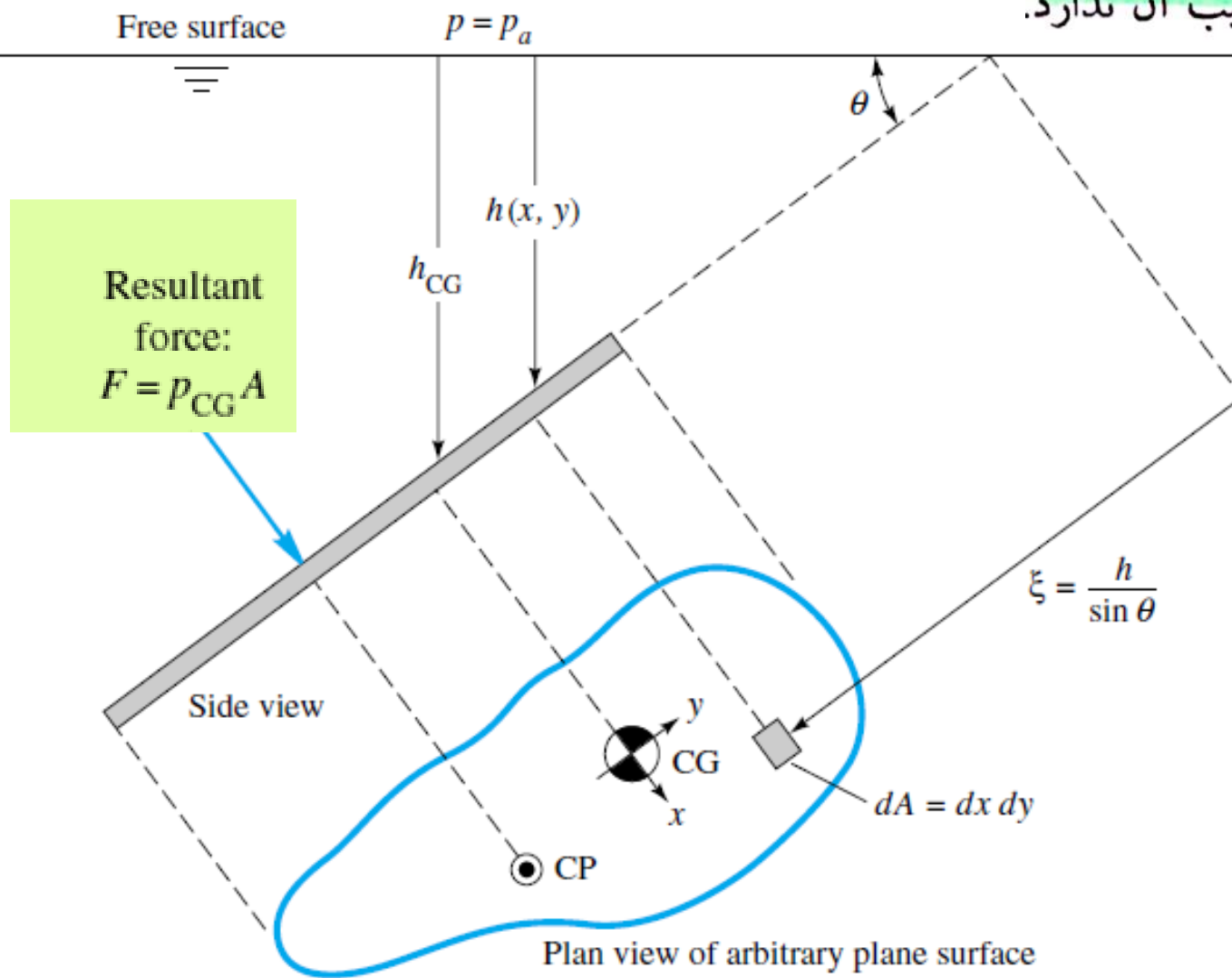
Therefore, since θ is constant along the plate, Eq. (2.35) becomes

$$F = p_a A + \gamma \sin \theta \int \xi \, dA = p_a A + \gamma \sin \theta \, \xi_{CG} A \quad (2.37)$$

Finally, unravel this by noticing that $\xi_{CG} \sin \theta = h_{CG}$, the depth straight down from the surface to the plate centroid. Thus

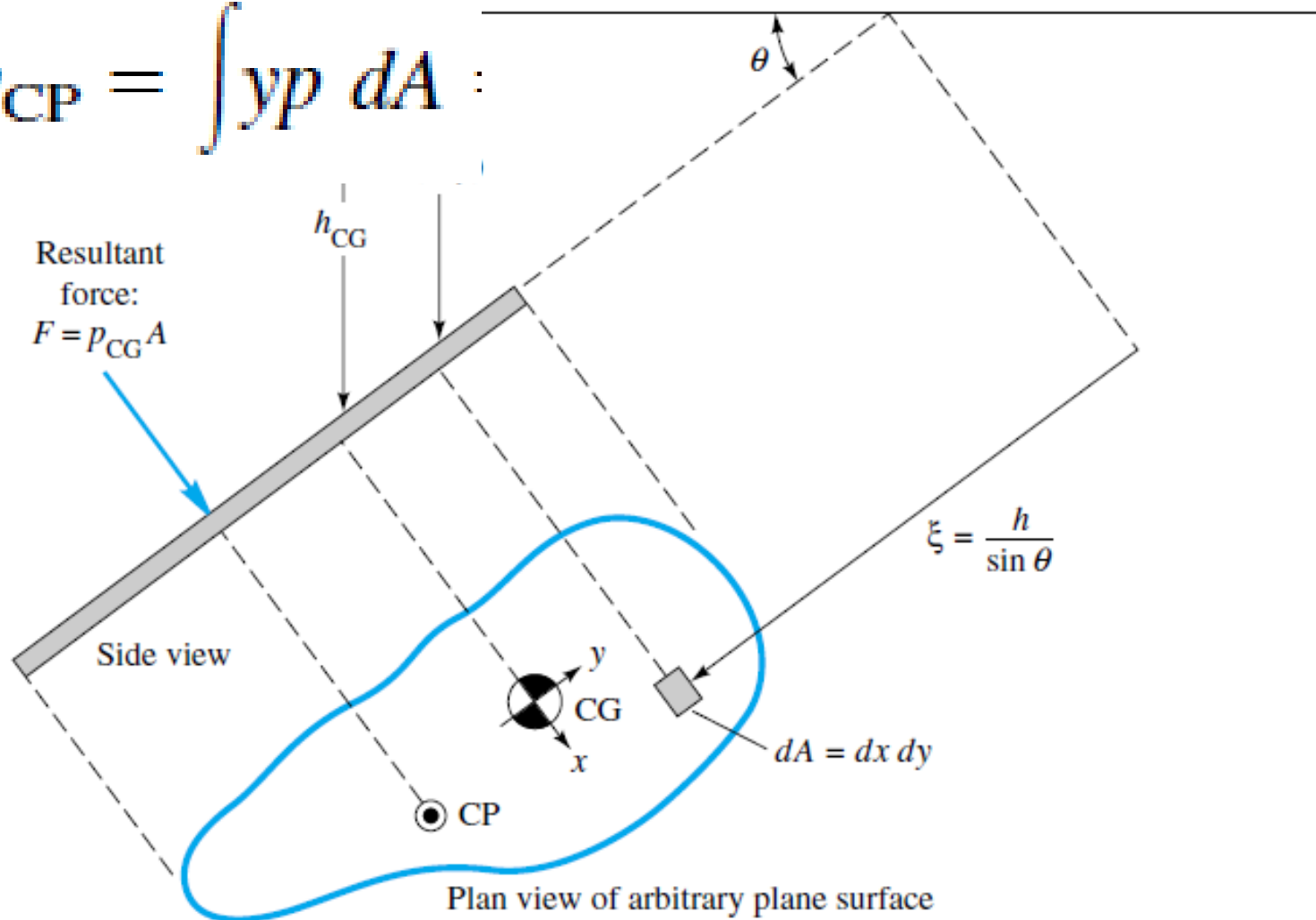
$$F = p_a A + \gamma h_{CG} A = (p_a + \gamma h_{CG}) A = p_{CG} A \quad (2.38)$$

طبق این رابطه، نیروی مؤثر بر یک طرف صفحه تخت غوطه‌ور در یک سیال تراکم‌ناپذیر برابر است با فشار در مرکزوار صفحه ضرب در مساحت صفحه. این نتیجه بستگی به شکل صفحه، و زاویه شیب آن ندارد.



برای تعیین محل اثر نیروی فشاری
از برابری گشتاور نیروی گسترده و نیروی پیوسته استفاده می شود

$$F y_{CP} = \int y p \, dA :$$



$$F_{y_{CP}} = \int y p dA = \int y (p_a + \gamma \xi \sin \theta) dA = \int y p_a dA + \gamma \sin \theta \int y \xi dA$$

$$= p_a \int y dA + \gamma \sin \theta \int y \xi dA$$

برای محورهای گذرا از مرکزوار، $\int y dA = 0$. بنابراین، از رابطه بالا نتیجه می شود:

$$F_{y_{CP}} = \gamma \sin \theta \int y \xi dA$$

سپس، با استفاده از رابطه $\xi = \xi_{CG} - y$ ، نتیجه می شود:

$$F_{y_{CP}} = \gamma \sin \theta \left(\xi_{CG} \int y dA - \int y^2 dA \right)$$

با توجه به اینکه $\int y dA = 0$ و $\int y^2 dA = I_{xx}$ ، از رابطه بالا نتیجه می شود:

$$F_{y_{CP}} = -\gamma \sin \theta I_{xx}$$

$$F_{y_{CP}} = -\gamma \sin \theta I_{xx}$$

که در آن، I_{xx} ممان اینرسی مساحت صفحه نسبت به محور مرکزی x است. با توجه به معادله (۲-۲۶)، از این رابطه نتیجه می‌شود:

$$y_{CP} = -\gamma \sin \theta \frac{I_{xx}}{p_{CG} A}$$

(۲-۲۷)

علامت منفی در معادله (۲-۲۷) نشان می‌دهد که y_{CP} در پایین مرکزوار صفحه است، و بستگی به زاویه θ دارد. با افزایش عمق صفحه، y_{GP} به مرکزوار صفحه نزدیک می‌شود زیرا تمام جمله‌ها در معادله (۲-۲۷) ثابت می‌مانند، غیر از p_{CG} که افزایش می‌یابد.

به طور مشابه، برای تعیین x_{CP} ، می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} Fx_{CP} &= \int xp \, dA = \int x[p_a + \gamma(\xi_{CG} - y)\sin\theta] \, dA \\ &= \int xp_a \, dA + \int x\gamma(\xi_{CG} - y)\sin\theta \, dA \\ &= p_a \int x \, dA + \gamma\sin\theta(\xi_{CG} \int x \, dA - \int xy \, dA) \end{aligned}$$

برای محوره‌های گذرا از مرکزوار، $\int x \, dA = 0$. ضمناً، $\int xy \, dA = I_{xy}$. بنابراین، از رابطه بالا نتیجه می‌شود:

$$Fx_{CP} = -\gamma\sin\theta I_{xy}$$

که در آن، I_{xy} حاصلضرب اینرسی صفحه است. با توجه به معادله (۲-۲۶)، از رابطه بالا نتیجه می‌شود:

$$x_{CP} = -\gamma\sin\theta \frac{I_{xy}}{p_{CG}A}$$

(۲-۲۸)

اگر $x_{CP} > 0$ ، I_{xy} منفی خواهد بود. در این حالت، مرکز فشار در سمت چپ مرکزوار صفحه است. اگر $x_{CP} = 0$ ، $I_{xy} = 0$ ، یعنی، مرکز فشار درست زیر مرکزوار، و برروی محور y قرار دارد.

فشار پیمانه‌ای

در محاسبات نیروی هیدروستاتیک، معمولاً از فشار محیط صرف نظر می‌شود زیرا این فشار در طرفین سطح اثر می‌کند. به عبارت دیگر، در محاسبات از فشار پیمانه‌ای استفاده می‌شود. بنابراین، $p_{CG} = \gamma h_{CG}$. در نتیجه، فرمول‌های (۲۶-۲) تا (۲۸-۲) به صورت زیر درمی‌آیند:

$$F = \gamma h_{CG} A$$

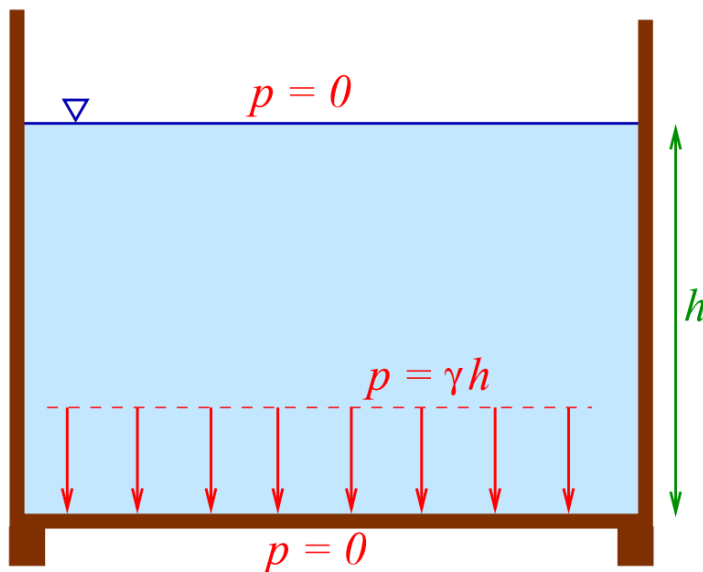
(۲۹-۲ الف)

$$y_{CP} = - \frac{I_{xx} \sin \theta}{h_{CG} A}$$

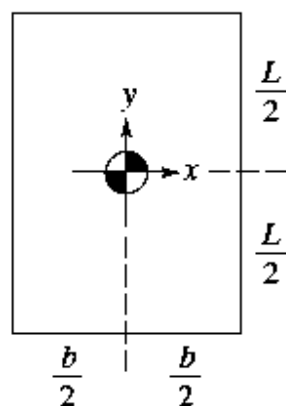
(۲۹-۲ ب)

$$x_{CP} = - \frac{I_{xy} \sin \theta}{h_{CG} A}$$

(۲۹-۲ ج)



$$F = \gamma h_{CG} A \quad y_{CP} = -\frac{I_{xx} \sin \theta}{h_{CG} A} \quad x_{CP} = -\frac{I_{xy} \sin \theta}{h_{CG} A} \quad (2.44)$$

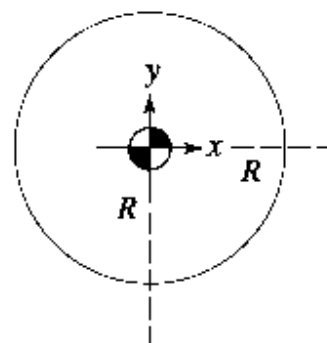


(a)

$$A = bL$$

$$I_{xx} = \frac{bL^3}{12}$$

$$I_{xy} = 0$$

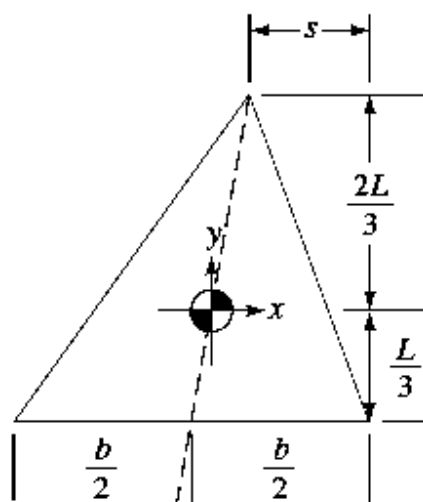


(b)

$$A = \pi R^2$$

$$I_{xx} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_{xy} = 0$$

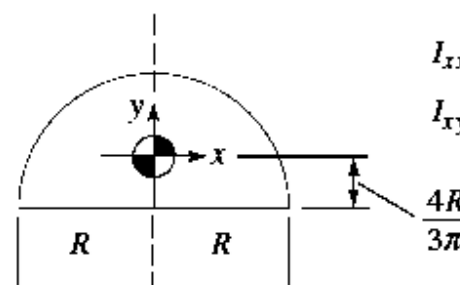


(c)

$$A = \frac{bL}{2}$$

$$I_{xx} = \frac{bL^3}{36}$$

$$I_{xy} = \frac{b(b-2s)L^2}{72}$$



(d)

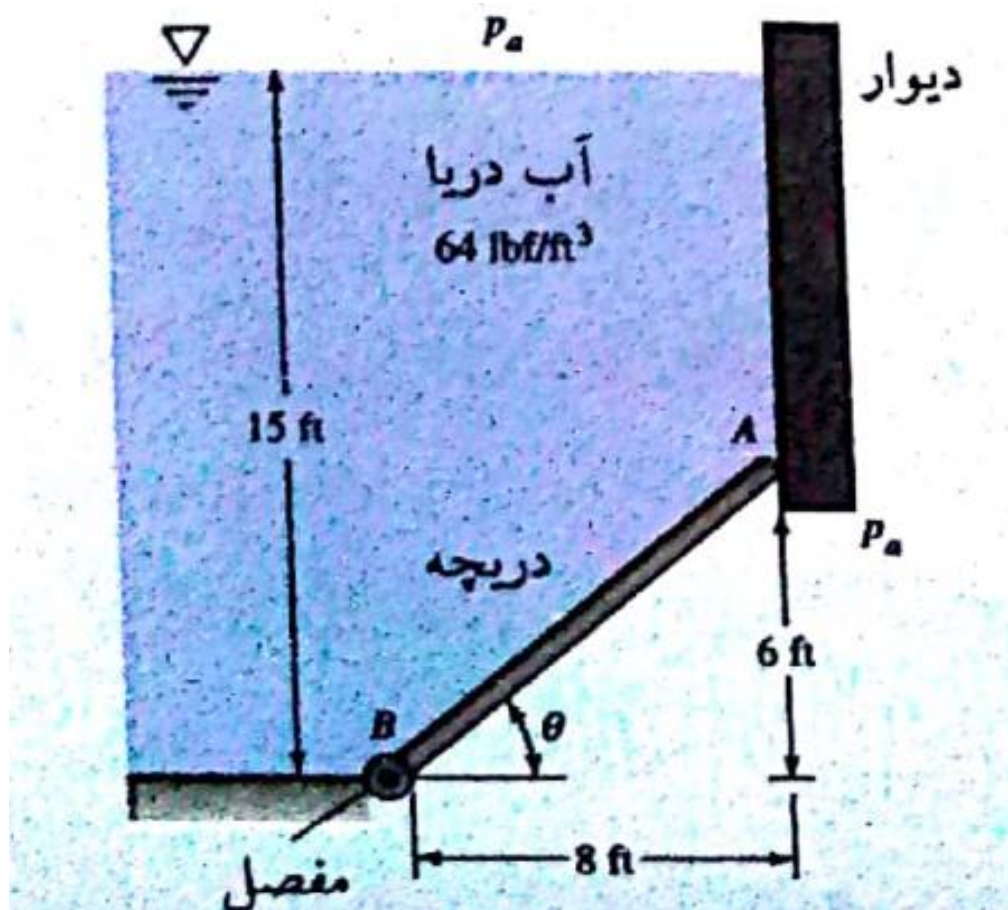
$$A = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$I_{xx} = 0.10976R^4$$

$$I_{xy} = 0$$

مثال ۲-۵

دریچه‌ای در نقطه B مفصل شده است، و در نقطه A به یک دیوار صاف تکیه داده است. عرض دریچه، در امتداد عمود بر صفحه کاغذ، 5 ft است. مطلوب است: (الف) نیروی مؤثر بر دریچه، (ب) نیروی افقی P وارده از نقطه A ، (ج) واکنش‌ها در مفصل B .



حل:

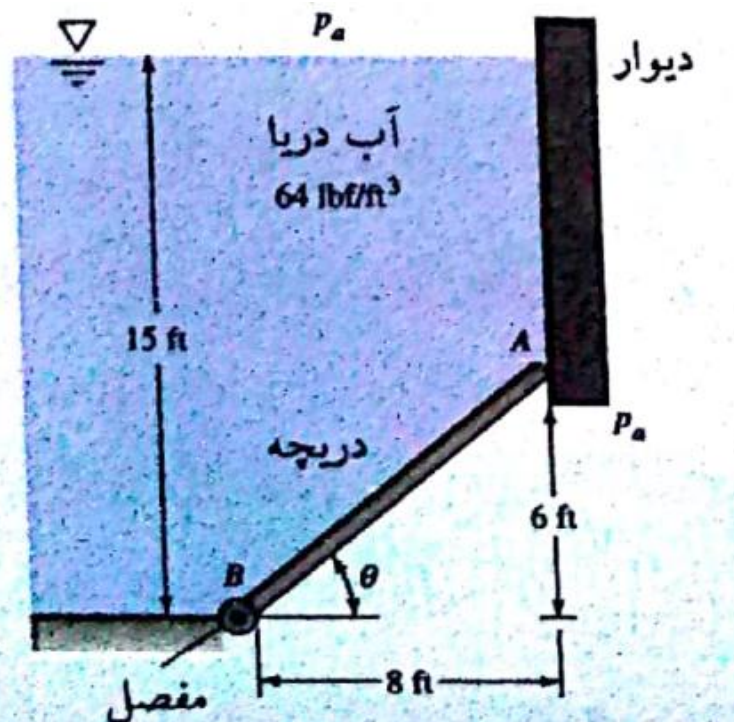
(الف). با توجه به شکل، طول دریچه از نقطه A تا B برابر با 10 ft است، و مرکزوار آن در وسط AB (3 ft بالای نقطه B) قرار دارد. عمق مرکزوار و مساحت دریچه، به ترتیب، عبارتند از:

$$h_{CG} = 15 - 3 = 12\text{ ft}$$

$$A = 5(10) = 50\text{ ft}^2$$

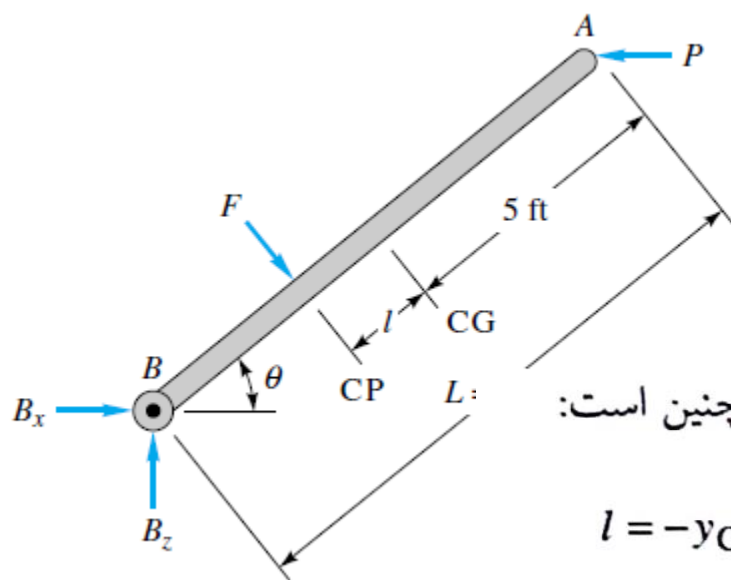
با توجه به فرمول (۲-۲۹ الف)، نیروی هیدروستاتیکی مؤثر بر دریچه چنین است:

$$F = \gamma h_{CG} A = (64\text{ lbf/ft}^3)(12\text{ ft})(50\text{ ft}^2) = 38400\text{ lbf}$$



(ب). برای تعیین نقطه اثر نیروی F (مرکز فشار)، نمودار آزاد دریچه را مطابق شکل زیر رسم می‌کنیم. دریچه به صورت مستطیل است. در نتیجه،

$$I_{xy} = 0, \quad I_{xx} = \frac{bL^3}{12} = \frac{(5\text{ ft})(10\text{ ft})^3}{12} = 417\text{ ft}^3$$



فاصله بین مرکزوار دریچه تا مرکز فشار آن، طبق معادله ۲-۲۹ ب، چنین است:

$$l = -y_{CP} = + \frac{I_{xx} \sin \theta}{h_{CG} A} = \frac{(417\text{ ft}^3) \left(\frac{6}{10}\right)}{(12\text{ ft})(50\text{ ft}^2)} = 0.417\text{ ft}$$

فاصله عمودی بین نقطه B تا خط اثر نیروی F برابر است با:

$$10 - l - 5 = 4.583\text{ ft}$$

گشتاور نیروها را نسبت به نقطه B جمع می‌زنیم. نتیجه می‌شود:

$$PL \sin \theta - F(5 - l) = 0 \Rightarrow P(6\text{ ft}) - (28400\text{ lbf})(4.583\text{ ft}) = 0$$

$$\Rightarrow P = 29300\text{ lbf}$$

(ج). برای تعیین واکنش‌های B_x و B_z ، می‌نویسیم:

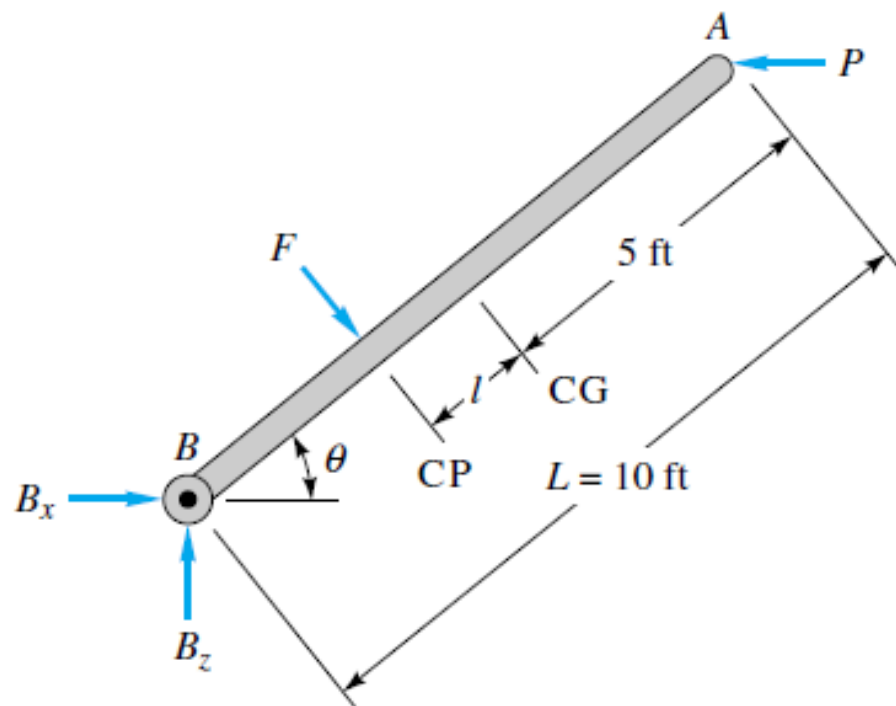
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow B_x + F \sin \theta - P = B_x + 28400 \text{ lbf} (0.6) - 29300 \text{ lbf} = 0$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow B_z - F \cos \theta = B_z - 28400 \text{ lbf} (0.8) = 0$$

از حل این معادله‌ها نتیجه می‌شود:

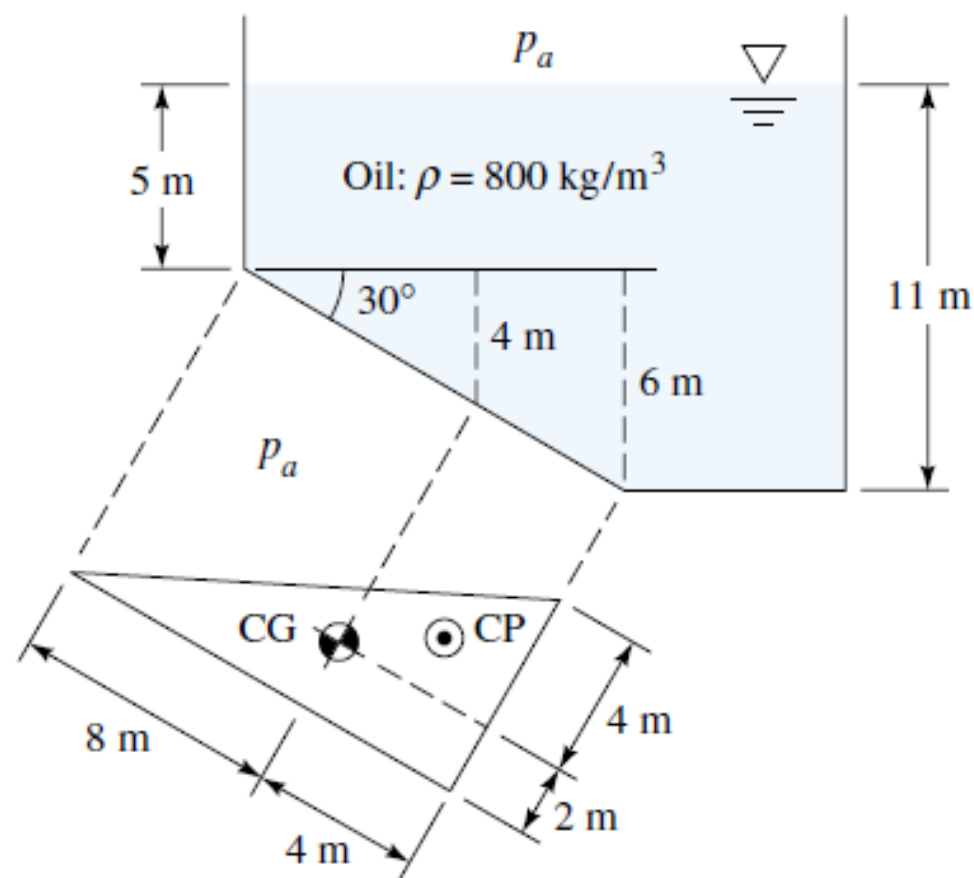
$$B_x = 6300 \text{ lbf}$$

$$B_z = 22720 \text{ lbf}$$



EXAMPLE 2.6

A tank of oil has a right-triangular panel near the bottom, as in Fig. E2.6. Omitting p_a , find the (a) hydrostatic force and (b) CP on the panel.



Solution

The triangle has properties given in Fig. 2.13c. The centroid is one-third up (4 m) and one-third over (2 m) from the lower left corner, as shown. The area is

$$\frac{1}{2}(6 \text{ m})(12 \text{ m}) = 36 \text{ m}^2$$

The moments of inertia are

$$I_{xx} = \frac{bL^3}{36} = \frac{(6 \text{ m})(12 \text{ m})^3}{36} = 288 \text{ m}^4$$

and

$$I_{xy} = \frac{b(b-2s)L^2}{72} = \frac{(6 \text{ m})[6 \text{ m} - 2(6 \text{ m})](12 \text{ m})^2}{72} = -72 \text{ m}^4$$

The depth to the centroid is $h_{CG} = 5 + 4 = 9 \text{ m}$; thus the hydrostatic force from Eq. (2.44) is

$$\begin{aligned} F &= \rho g h_{CG} A = (800 \text{ kg/m}^3)(9.807 \text{ m/s}^2)(9 \text{ m})(36 \text{ m}^2) \\ &= 2.54 \times 10^6 (\text{kg} \cdot \text{m})/\text{s}^2 = 2.54 \times 10^6 \text{ N} = 2.54 \text{ MN} \end{aligned} \quad \text{Ans. (a)}$$

The CP position is given by Eqs. (2.44):

$$\begin{aligned} y_{CP} &= -\frac{I_{xx} \sin \theta}{h_{CG} A} = -\frac{(288 \text{ m}^4)(\sin 30^\circ)}{(9 \text{ m})(36 \text{ m}^2)} = -0.444 \text{ m} \\ x_{CP} &= -\frac{I_{xy} \sin \theta}{h_{CG} A} = -\frac{(-72 \text{ m}^4)(\sin 30^\circ)}{(9 \text{ m})(36 \text{ m}^2)} = +0.111 \text{ m} \end{aligned} \quad \text{Ans. (b)}$$

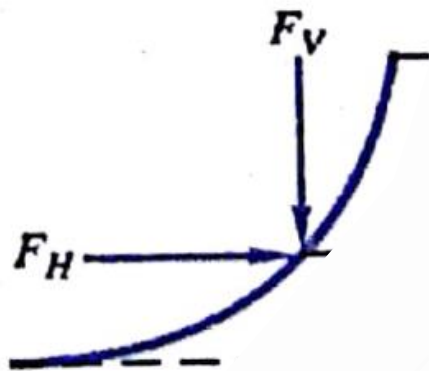
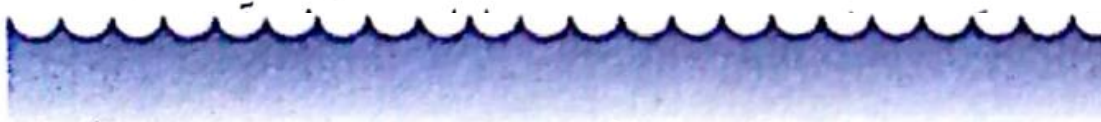
The resultant force $F = 2.54 \text{ MN}$ acts through this point, which is down and to the right of the centroid, as shown in Fig. E2.6.

۲-۶ نیروی هیدروستاتیکی مؤثر بر سطوح خمیده

سطح خمیده در شکل ۲-۱۴ را در نظر بگیرید. نیروهای جزئی فشاری بر اجزای این سطح عمود هستند. به علت انحنای سطح، این نیروها هم امتداد و هم جهت نیستند. به همین دلیل، برای تعیین نیروی برآیند، مؤلفه‌های آن را باید به دست آورد.

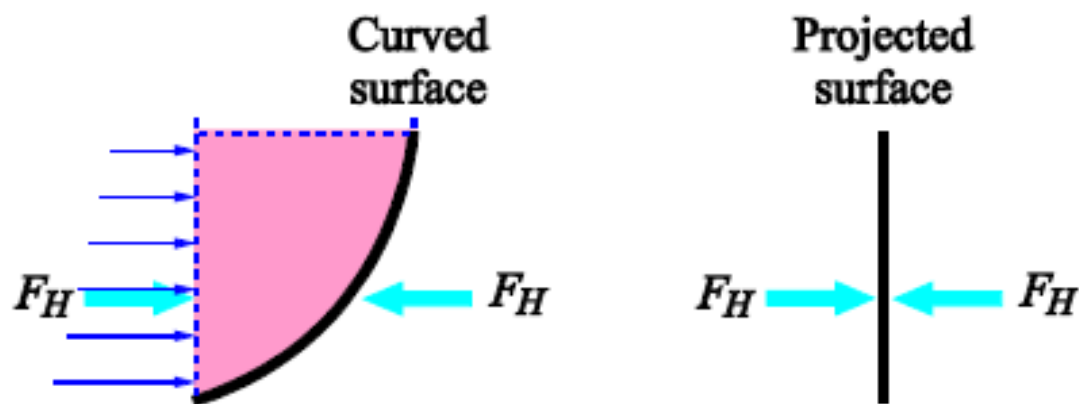
۶-۲ نیروی هیدروستاتیکی مؤثر بر سطوح خمیده

سطح خمیده در شکل ۱۴-۲ را در نظر بگیرید. نیروهای جزئی فشاری بر اجزای این سطح عمود هستند. به علت انحنای سطح، این نیروها هم امتداد و هم جهت نیستند. به همین دلیل، برای تعیین نیروی برآیند، مؤلفه‌های آن را باید به دست آورد.



شکل ۱۴-۲ محاسبه نیروی هیدروستاتیکی
مؤثر بر یک سطح خمیده.

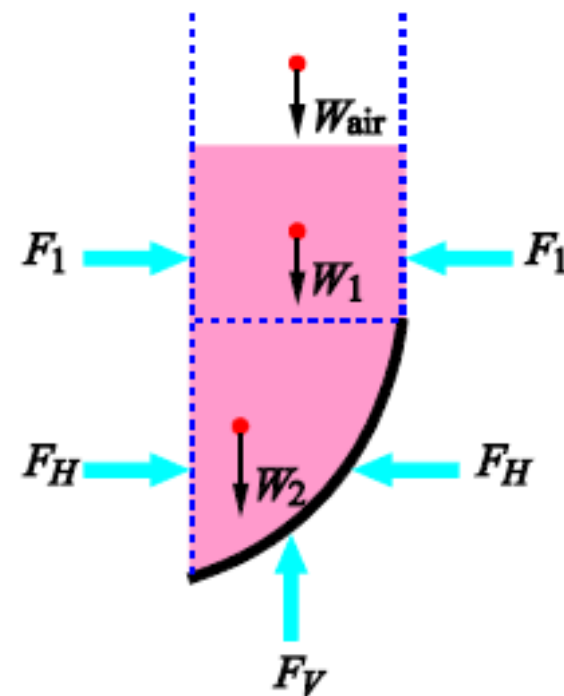
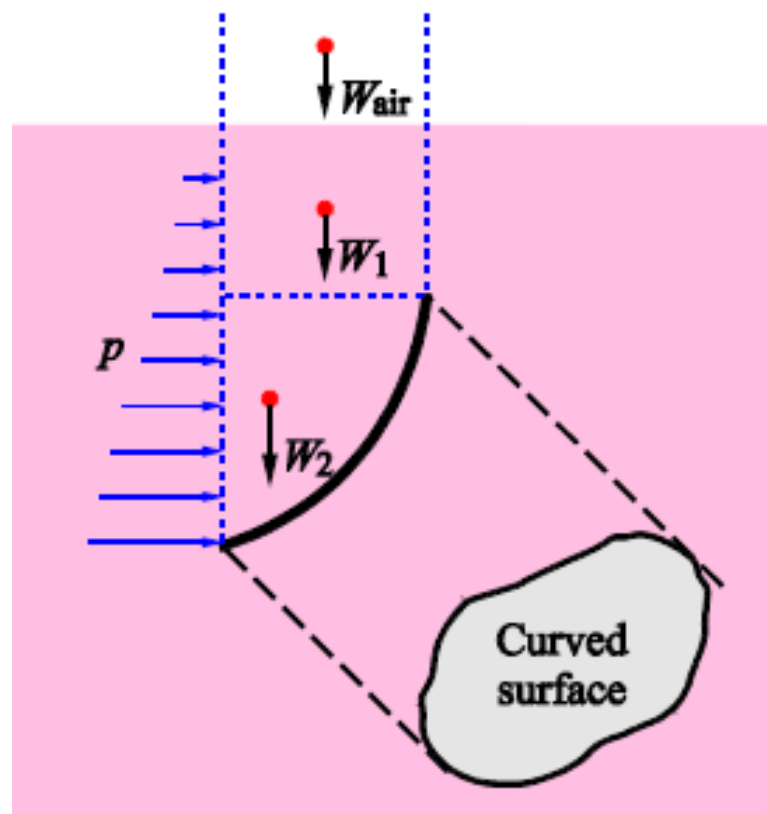
دستگاه مختصات xyz را در نظر می‌گیریم (صفحه xoy به موازات سطح آزاد، و محور z را در امتداد عمودی رو به بالا انتخاب می‌کنیم). تصویر خالص سطح خمیده را بر روی صفحه yoz می‌یابیم. نیروی هیدروستاتیکی مؤثر بر این سطح تصویر، F_x را نشان می‌دهد. برای تعیین



می یابیم. اگر سطح خمیده نسبت به صفحه yoz تقارن داشته باشد، $F_x = 0$. اگر سطح خمیده نسبت به صفحه xoz تقارن داشته باشد، $F_y = 0$. مؤلفه نیروی هیدروستاتیکی مؤثر بر سطح خمیده در امتداد محور عمودی z چنین است.

$$F_V = W_1 + W_2 + W_{air}$$

(۲-۳۰)

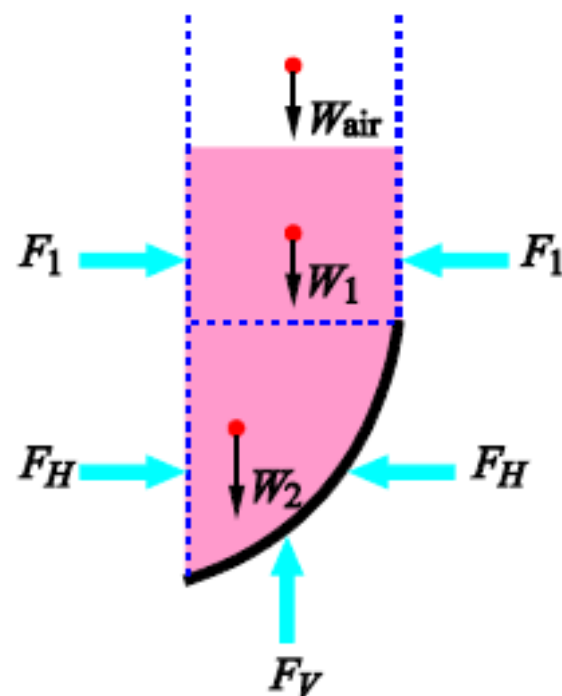
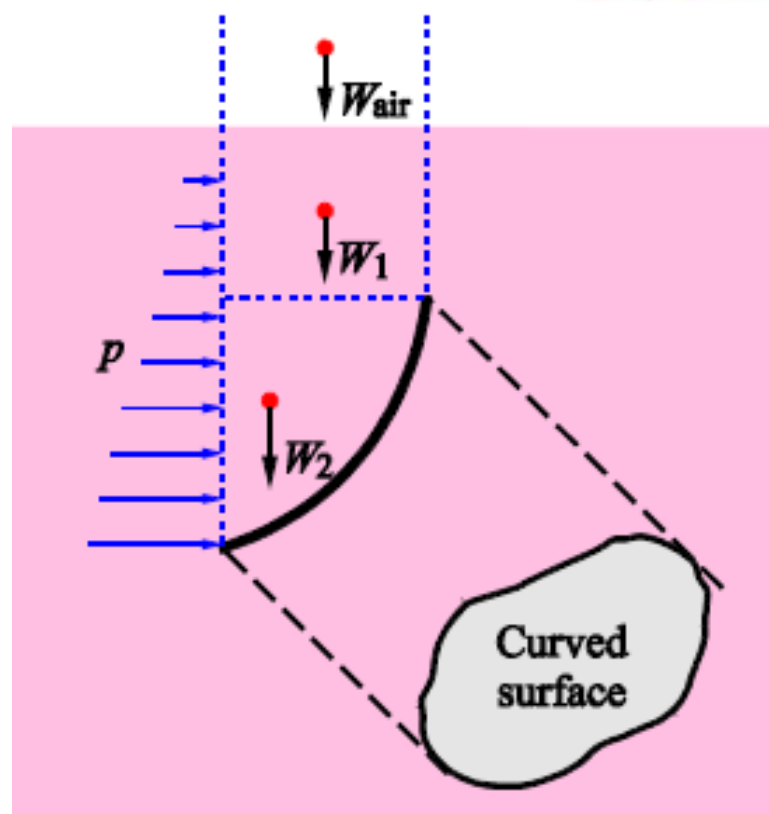


به عبارت دیگر،

مؤلفه نیروی هیدروستاتیکی مؤثر بر یک سطح خمیده در امتداد محور z برابر است با وزن ستونی از سیال (مایع و اتمسفر) که بر روی سطح خمیده قرار دارد.

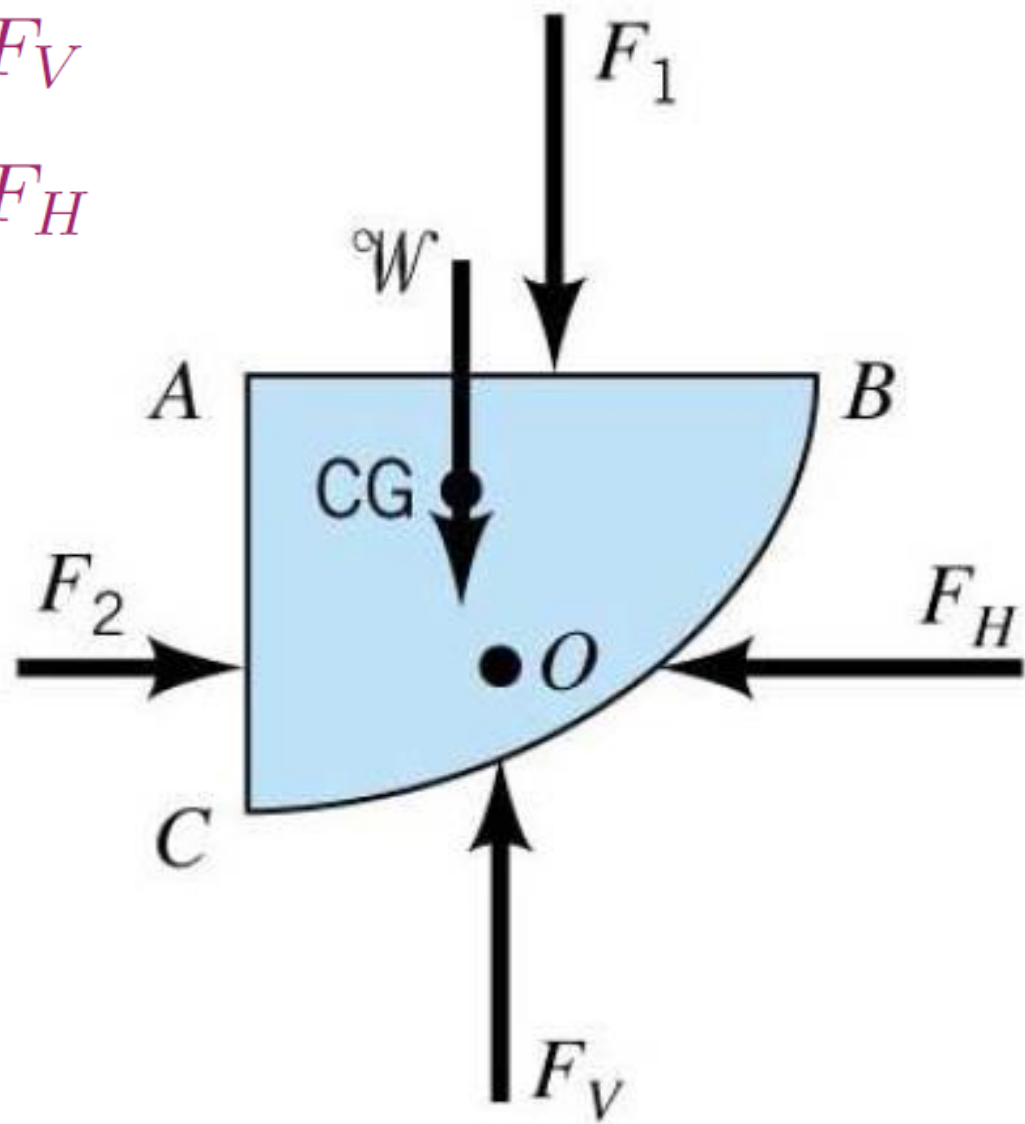
$$F_V = W_1 + W_2 + W_{\text{air}}$$

(۳۰-۲)



$$F_1 + W = F_V$$

$$F_2 = F_H$$

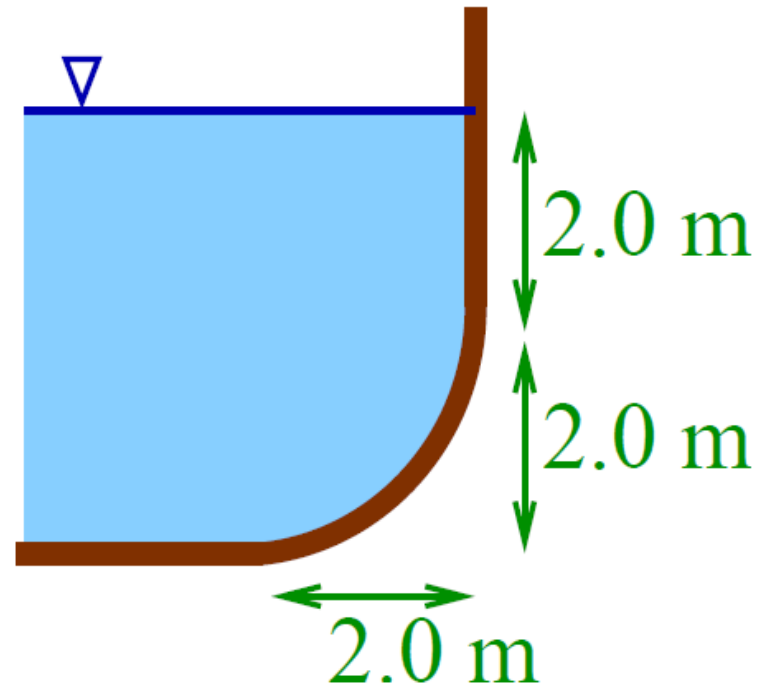


Curved Surface, example

Determine the resultant force on the curved part of the base and also determine its line of action.

The bottom corner of the tank is a circle of radius 2.0 m .

The tank length (out of page) is 8.0 m .

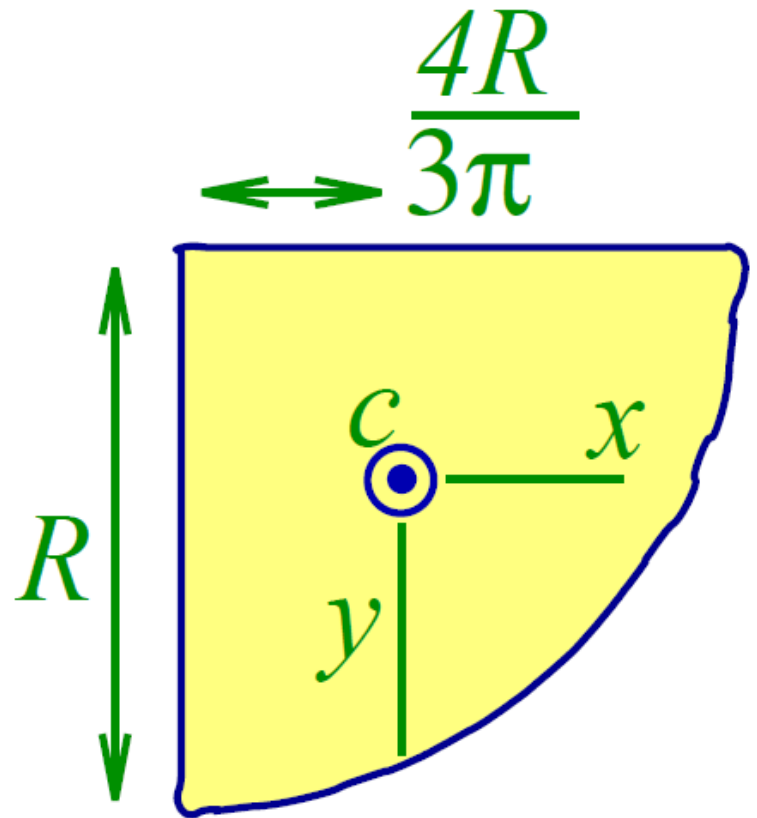


Quarter Circle

$$A = \pi R^2 / 4$$

$$I_{xc} = I_{yc} = 0.05488 R^4$$

$$I_{xyc} = -0.01647 R^4$$

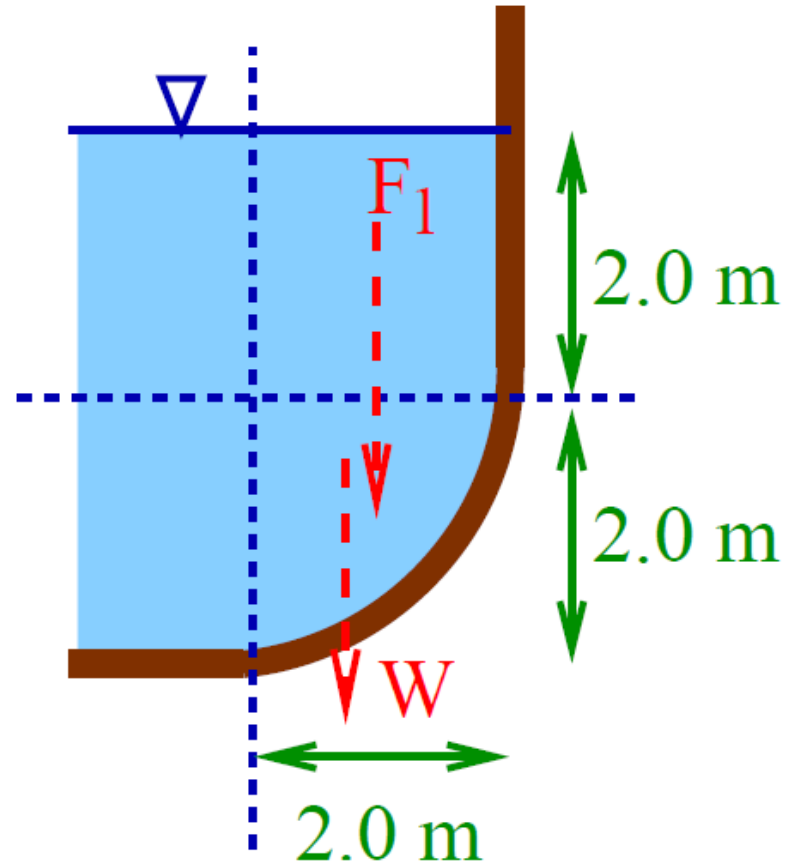


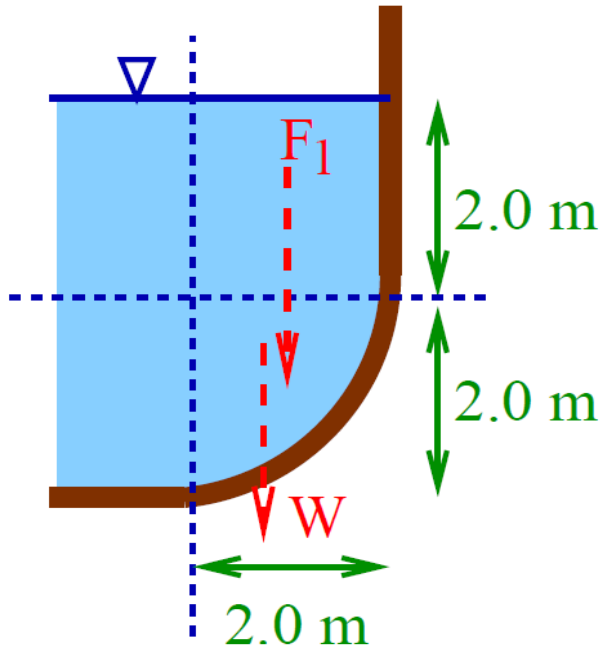
The centroid of the quarter circle wedge is

$$x_c = \frac{4R}{3\pi}$$

$$x_c = 0.84883 \text{ m}$$

It is 0.84883 m from the left boundary of quarter circle.





$$F_1 = \gamma 2.0(2.0 \times 8.0)$$

$$F_1 = 313.6 \text{ kN}$$

$$W = \gamma \frac{1}{4} \pi (2.0)^2 \times 8.0$$

$$W = 246.3 \text{ kN}$$

The total vertical force is
 $246.3 + 313.6 = 559.9 \text{ kN}$

F_1 line of action 1.0 m from wall.

W line of action $2.0 - 0.84883 = 1.151 \text{ m}$ from wall.

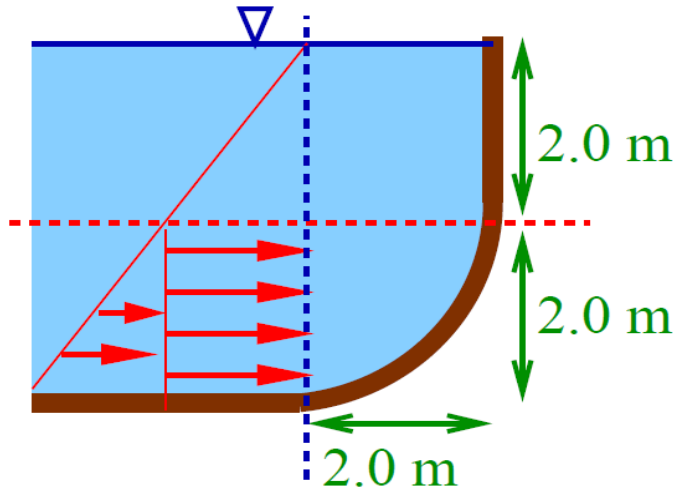
Line of action for F_1 and W .

$$x_R = \frac{313.6 \times 1.0 + 246.3 \times 1.151}{559.9}$$

$$x_R = 1.066 \text{ m}$$

Curved Surface, Horizontal

Rectangle



$$F_{\square} = \gamma 2.0(2.0 \times 8.0)$$

$$F_{\square} = 313.6 \text{ kN}$$

$$F_{\triangle} = \gamma \frac{1}{2} 2.0(2.0 \times 8.0)$$

$$F_{\triangle} = 156.8 \text{ kN}$$

The net horizontal force is $313.6 + 156.8 = 470.4 \text{ kN}$

$F_{\square}$ line of action 1.0 m below 2.0 m line.

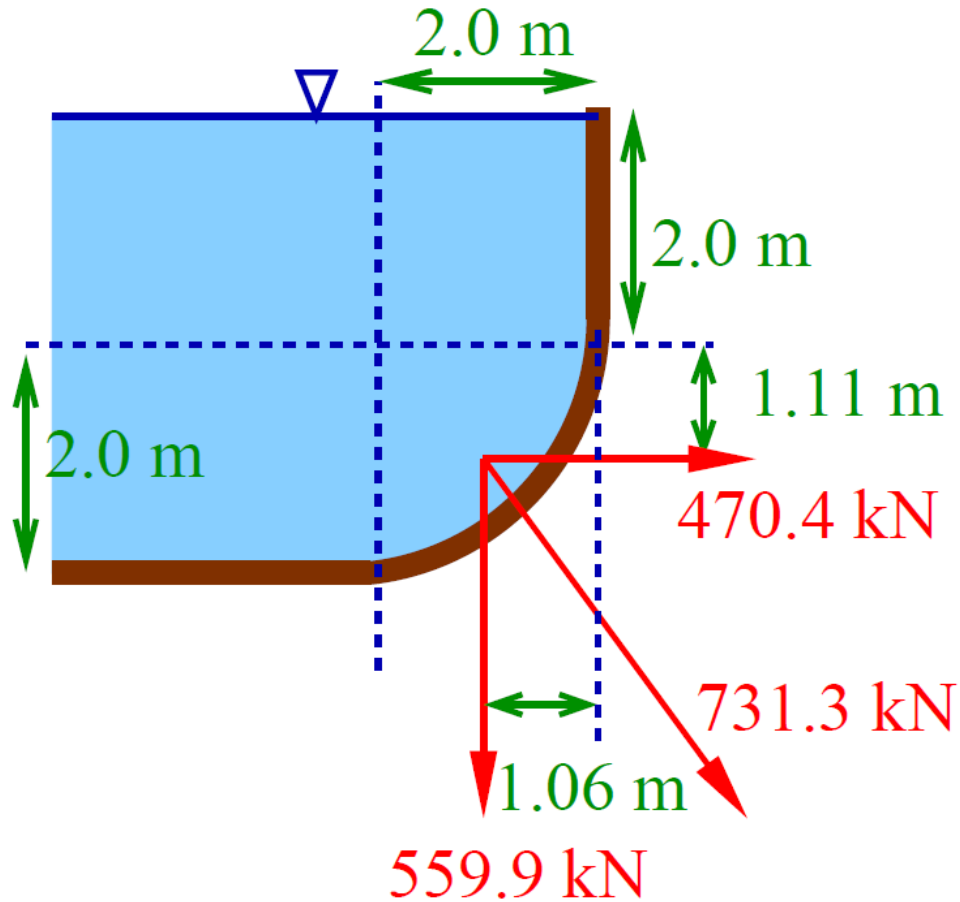
$F_{\triangle}$ line of action 1.33 m below 2.0 m line.

Line of action for horizontal force.

$$y_R = \frac{313.6 \times 1.0 + 156.8 \times 1.333}{470.4}$$

$$y_R = 1.11 \text{ m}$$

Curved Surface, Summary



The net force is

$$F_R = \sqrt{559.9^2 + 470.4^2} = 731.3 \text{ kN}$$

حل:

تحلیل: برای تعیین مؤلفه افقی نیروی مؤثر برسد، تصویر قائم سد را می‌یابیم. این تصویر به صورت یک مستطیل است که ارتفاع آن (در امتداد محور z) برابر با 24 ft ، و عرض آن 50 ft است. مرکزوار این مستطیل در عمق $h_{CG} = 24/2 = 12\text{ ft}$ قرار دارد. مساحت این مستطیل چنین است:

$$A = (24\text{ ft})(50\text{ ft}) = 1200\text{ ft}^2$$

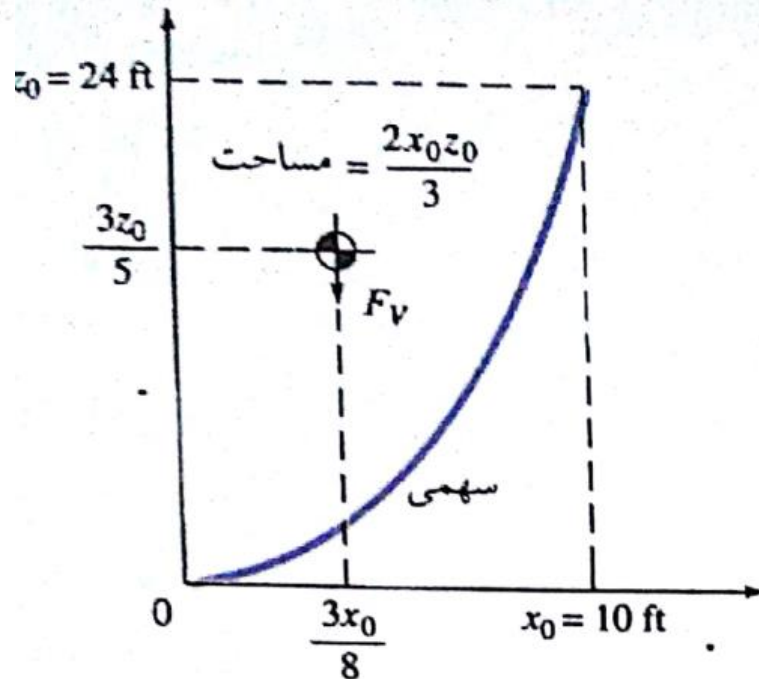
طبق معادله (۲-۲۹ الف)،

$$F_H = \gamma h_{CG} A_{\text{تصویر}} = \left(62.4 \frac{\text{lbf}}{\text{ft}^3} \right) (12\text{ ft})(1200\text{ ft}^2) = 898560\text{ lbf} \approx 899 \times 10^3\text{ lbf} \quad \blacktriangleleft$$

خط اثر F_H در زیر مرکزوار سطح A قرار دارد. طبق معادله (۲-۲۹ ب)،

$$y_{CP} = -\frac{I_{xx} \sin \theta}{h_{CG} A} = -\frac{(\frac{1}{12})(50 \text{ ft})(24 \text{ ft})^3 \sin 90^\circ}{(12 \text{ ft})(1200 \text{ ft}^2)} = -4 \text{ ft}$$

بنابراین، خط اثر مؤلفه افقی F_H در فاصله $12 + 4 = 16 \text{ ft}$ از سطح آب (یا ۸ ft از کف سد) قرار دارد. توضیح: مؤلفه F_H و خط اثر آن با استفاده از تصویر قائم سهمی به دست آمده‌اند. چون این تصویر در امتداد عمود بر سطح آزاد قرار دارد، زاویه θ برای آن 90° است.

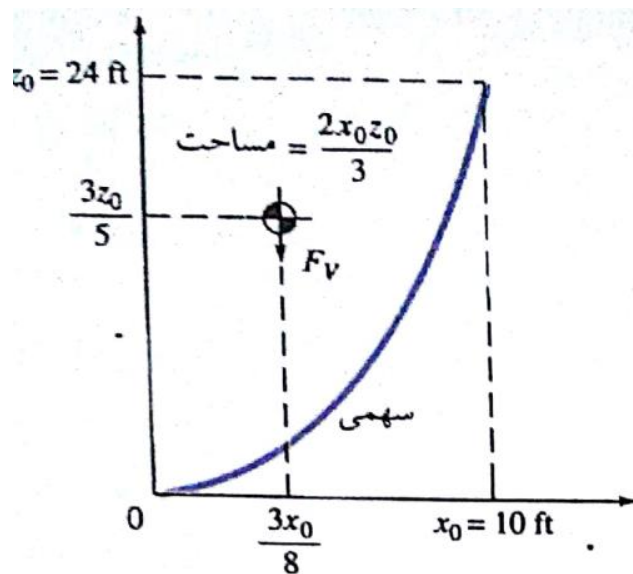


مؤلفه عمودی F_V برابر است با وزن ستونی از آب که بر روی سد قرار دارد. در شکل زیر، مساحت و مرکزوار سهمی نشان داده شده است: بنابراین، وزن آب موجود بر روی این سد سهموی چنین است:

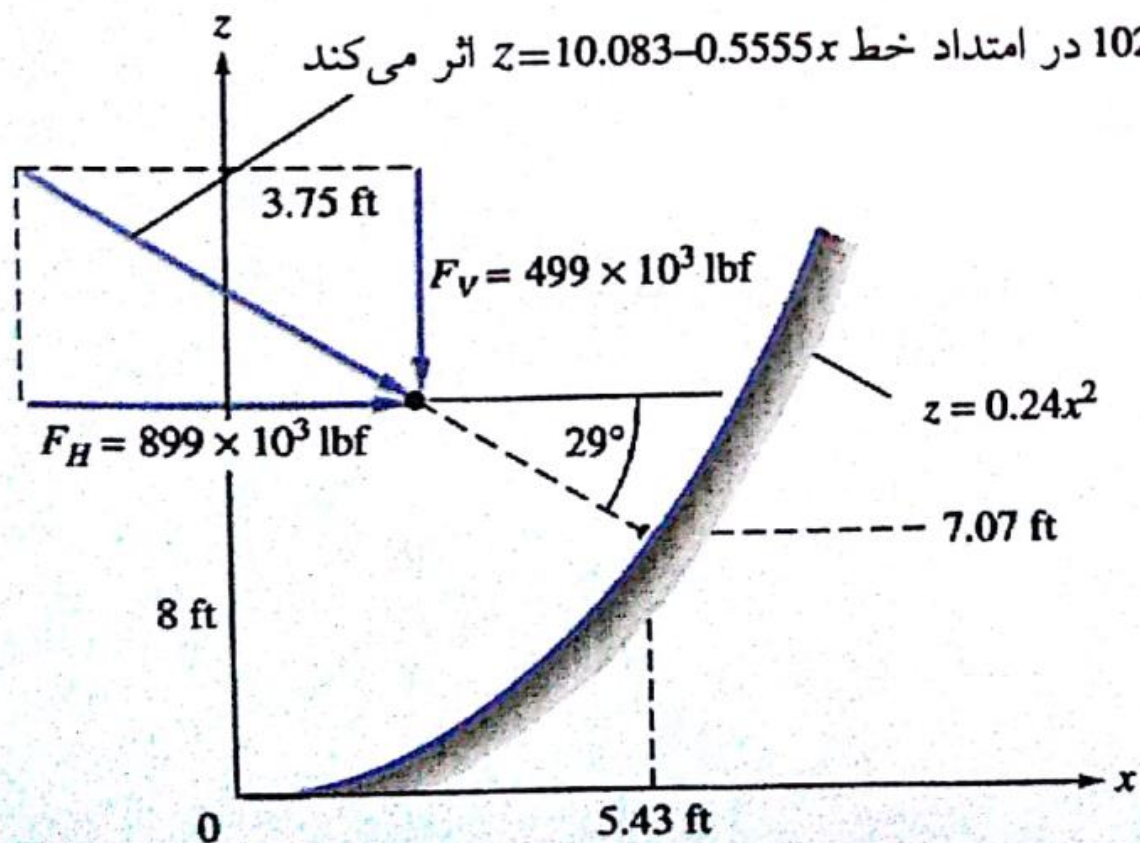
$$F_V = \gamma A_{\text{سهمی}} b = \left(62.4 \frac{\text{lbf}}{\text{ft}^3} \right) \left[\frac{2}{3} (24 \text{ ft}) (10 \text{ ft}) \right] (50 \text{ ft}) = 499200 \text{ lbf} \approx 499 \times 10^3 \text{ lbf} \quad \blacktriangleleft$$

این نیرو، که به سمت پایین اثر می کند، از مرکزوار سهمی (واقع در فاصله $2x_0/3 = 3.75 \text{ ft}$ از مبدأ) می گذرد (به شکل زیر نگاه کنید). برایند نیروی هیدروستاتیکی مؤثر برسد چنین است:

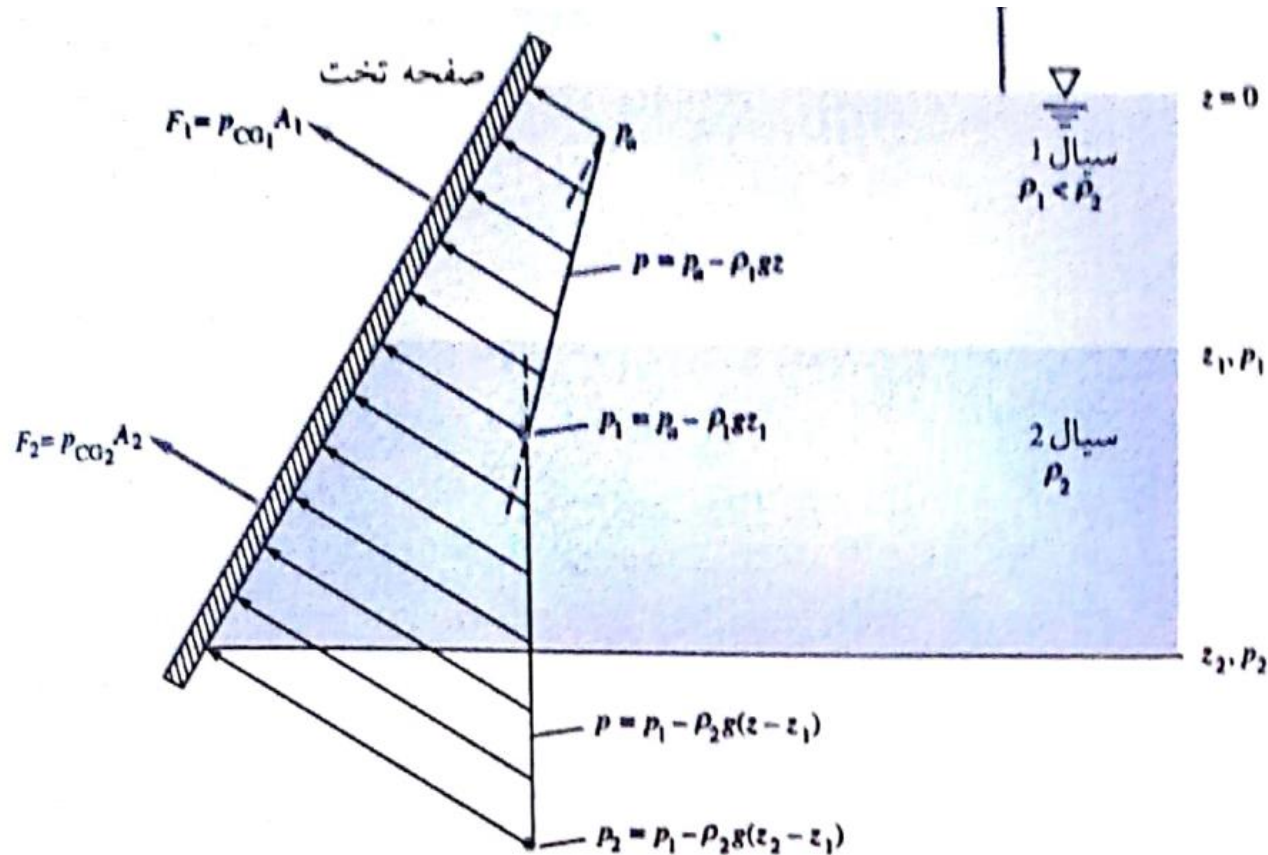
$$F = (F_H^2 + F_V^2)^{\frac{1}{2}} = [(899 \times 10^3 \text{ lbf})^2 + (499 \times 10^3 \text{ lbf})^2]^{\frac{1}{2}} = 1028 \times 10^3 \text{ lbf} \quad \blacktriangleleft$$



مطابق شکل زیر، این نیرو تحت زاویه 29° با افق قرار دارد. نقطه اثر این نیرو در فاصله افقی 3.75 ft از مبدأ، و فاصله عمودی 8 ft از مبدأ قرار دارد. مطابق شکل زیر، خط اثر این نیرو، سد را در مختصه افقی 5.43 ft و مختصه عمودی 7.07 ft قطع می‌کند.



فرمول‌های داده شده در قسمت‌های ۲-۵ و ۲-۶ فقط برای یک سیال با چگالی یکنواخت به کار می‌روند. برای محاسبه نیروی هیدروستاتیکی ناشی از چند سیال مخلوط‌نشدنی، از یک فرمول تنها نمی‌توان استفاده کرد زیرا شیب فشار بین لایه‌های مختلف تغییر می‌کند. شکل ۲-۱۵، یک صفحه تخت شیب‌دار غوطه‌ور در دو سیال مخلوط‌نشدنی را نشان می‌دهد.



برای تعیین نیروی کل مؤثر بر این صفحه نمی توان فشار در مرکزوار صفحه را در مساحت آن ضرب کرد، بلکه باید نیروی مؤثر بر قسمت غوطه ور در هر سیال را با هم جمع کرد:

$$F = \sum F_i = \sum p_{CG_i} A_i \quad (۳۱-۲)$$

مختصات مرکز فشار هر سطح چنین است:

$$y_{CP_i} = - \frac{\rho_i g \sin \theta_i I_{xx_i}}{p_{CG_i} A_i} \quad (۳۲-۲ \text{ الف})$$

$$x_{CP_i} = - \frac{\rho_i g \sin \theta_i I_{xy_i}}{p_{CG_i} A_i} \quad (۳۲-۲ \text{ ب})$$

برای تعیین نیروی کل مؤثر بر این صفحه نمی توان فشار در مرکزوار صفحه را در مساحت آن ضرب کرد، بلکه باید نیروی مؤثر بر قسمت غوطه ور در هر سیال را با هم جمع کرد:

$$F = \sum F_i = \sum p_{CG_i} A_i \quad (۳۱-۲)$$

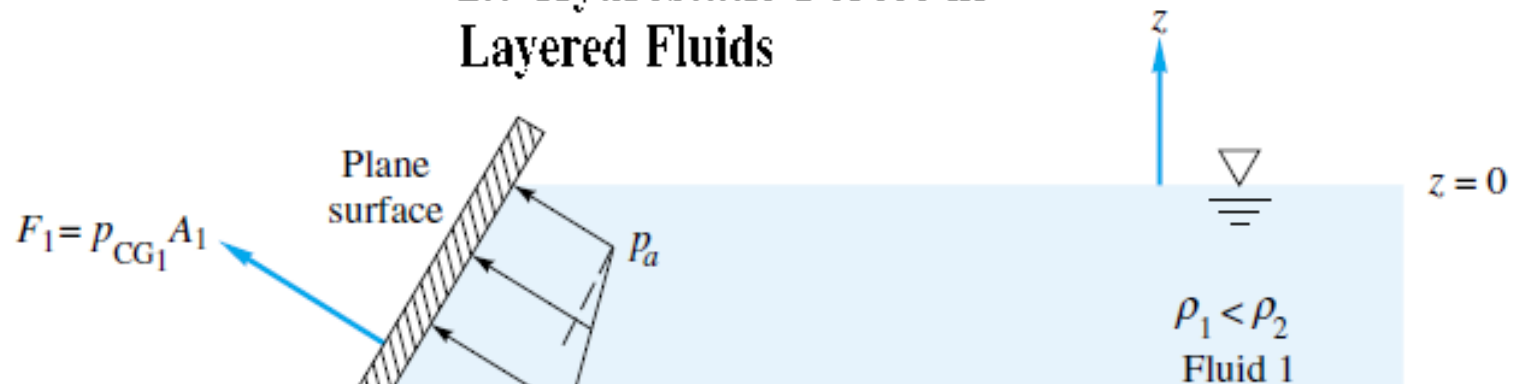
مختصات مرکز فشار هر سطح چنین است:

$$y_{CP_i} = - \frac{\rho_i g \sin \theta_i I_{xx_i}}{p_{CG_i} A_i} \quad (۳۲-۲ \text{ الف})$$

$$x_{CP_i} = - \frac{\rho_i g \sin \theta_i I_{xy_i}}{p_{CG_i} A_i} \quad (۳۲-۲ \text{ ب})$$

این فرمول ها نقطه اثر نیروی F_i را نسبت به مرکزوار سطحی که این نیرو بر آن اثر می کند نشان می دهند. برای تعیین نقطه اثر نیروی برابند $F = \sum F_i$ ، از قاعده جمع زدن گشتاورها نسبت به یک نقطه مناسب می توان استفاده کرد.

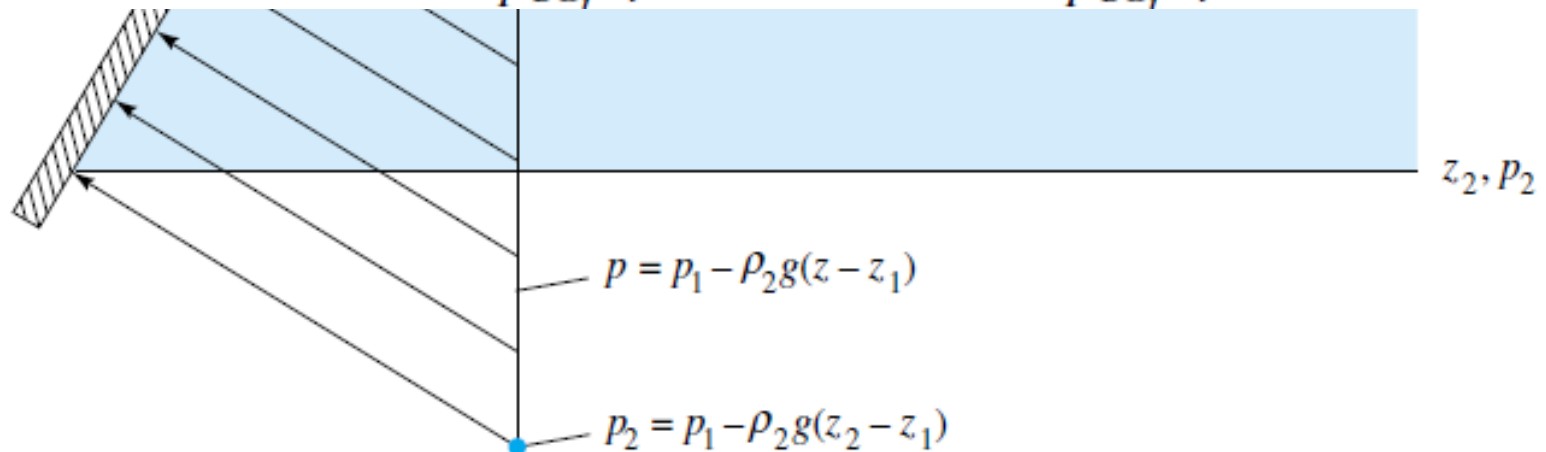
2.7 Hydrostatic Forces in Layered Fluids



$$F = \sum F_i = \sum p_{CG_i} A_i \quad (2.46)$$

Similarly, the centroid of the plate portion in each layer can be used to locate the center of pressure on that portion

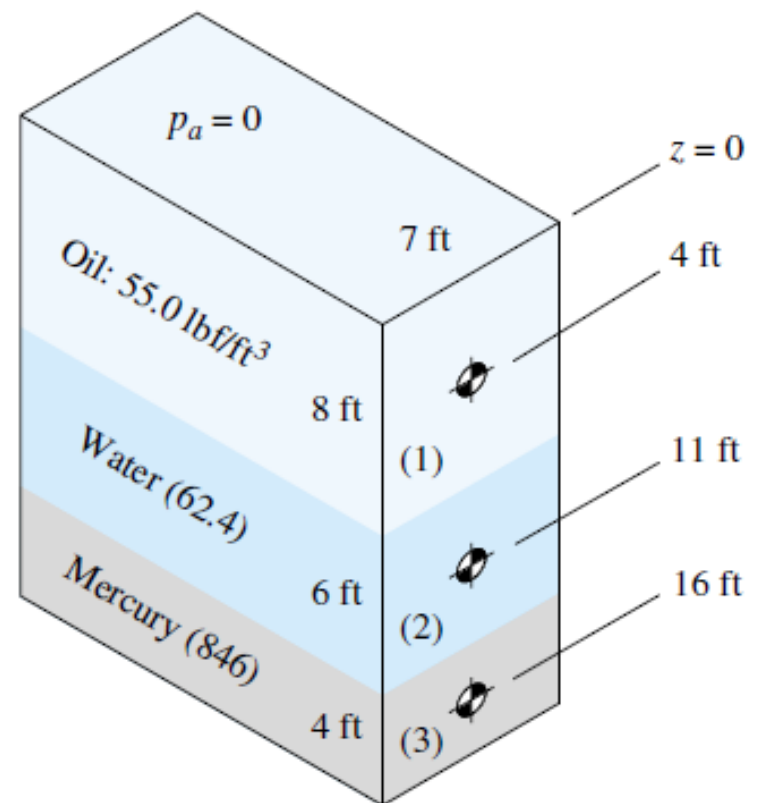
$$y_{CP_i} = -\frac{\rho_i g \sin \theta_i I_{xx_i}}{p_{CG_i} A_i} \quad x_{CP_i} = -\frac{\rho_i g \sin \theta_i I_{xy_i}}{p_{CG_i} A_i} \quad (2.47)$$



EXAMPLE 2.8

A tank 20 ft deep and 7 ft wide is layered with 8 ft of oil, 6 ft of water, and 4 ft of mercury. Compute (a) the total hydrostatic force and (b) the resultant center of pressure of the fluid on the right-hand side of the tank.

$$P_{CG_1} = (55.0 \text{ lbf/ft}^3)(4 \text{ ft}) = 220 \text{ lbf/ft}^2$$
$$p_{CG_2} = (55.0)(8) + 62.4(3) = 627 \text{ lbf/ft}^2$$
$$p_{CG_3} = (55.0)(8) + 62.4(6) + 846(2) = 2506 \text{ lbf/ft}^2$$



Solution

Divide the end panel into three parts as sketched in Fig. E2.8, and find the hydrostatic pressure at the centroid of each part, using the relation (2.38) in steps as in Fig. E2.8:

These pressures are then multiplied by the respective panel areas to find the force on each portion:

$$F_1 = p_{CG_1}A_1 = (220 \text{ lbf/ft}^2)(8 \text{ ft})(7 \text{ ft}) = 12,300 \text{ lbf}$$

$$F_2 = p_{CG_2}A_2 = 627(6)(7) = 26,300 \text{ lbf}$$

$$F_3 = p_{CG_3}A_3 = 2506(4)(7) = \underline{70,200 \text{ lbf}}$$

$$F = \sum F_i = 108,800 \text{ lbf} \qquad \text{Ans. (a)}$$

Equations (2.47) can be used to locate the CP of each force F_i , noting that $\theta = 90^\circ$ and $\sin \theta = 1$ for all parts. The moments of inertia are $I_{xx_1} = (7 \text{ ft})(8 \text{ ft})^3/12 = 298.7 \text{ ft}^4$, $I_{xx_2} = 7(6)^3/12 = 126.0 \text{ ft}^4$, and $I_{xx_3} = 7(4)^3/12 = 37.3 \text{ ft}^4$. The centers of pressure are thus at

$$y_{CP_1} = -\frac{\rho_1 g I_{xx_1}}{F_1} = -\frac{(55.0 \text{ lbf/ft}^3)(298.7 \text{ ft}^4)}{12,300 \text{ lbf}} = -1.33 \text{ ft}$$

$$y_{CP_2} = -\frac{62.4(126.0)}{26,300} = -0.30 \text{ ft} \quad y_{CP_3} = -\frac{846(37.3)}{70,200} = -0.45 \text{ ft}$$

This locates $z_{CP_1} = -4 - 1.33 = -5.33 \text{ ft}$, $z_{CP_2} = -11 - 0.30 = -11.30 \text{ ft}$, and $z_{CP_3} = -16 - 0.45 = -16.45 \text{ ft}$. Summing moments about the surface then gives

$$\sum F_i z_{CP_i} = F z_{CP}$$

or $12,300(-5.33) + 26,300(-11.30) + 70,200(-16.45) = 108,800 z_{CP}$

or $z_{CP} = -\frac{1,518,000}{108,800} = -13.95 \text{ ft} \quad \text{Ans. (b)}$

The center of pressure of the total resultant force on the right side of the tank lies 13.95 ft below the surface.
