

بسمه تعالی

مدلسازی و شبیه سازی مخازن

۵۲ / ۱

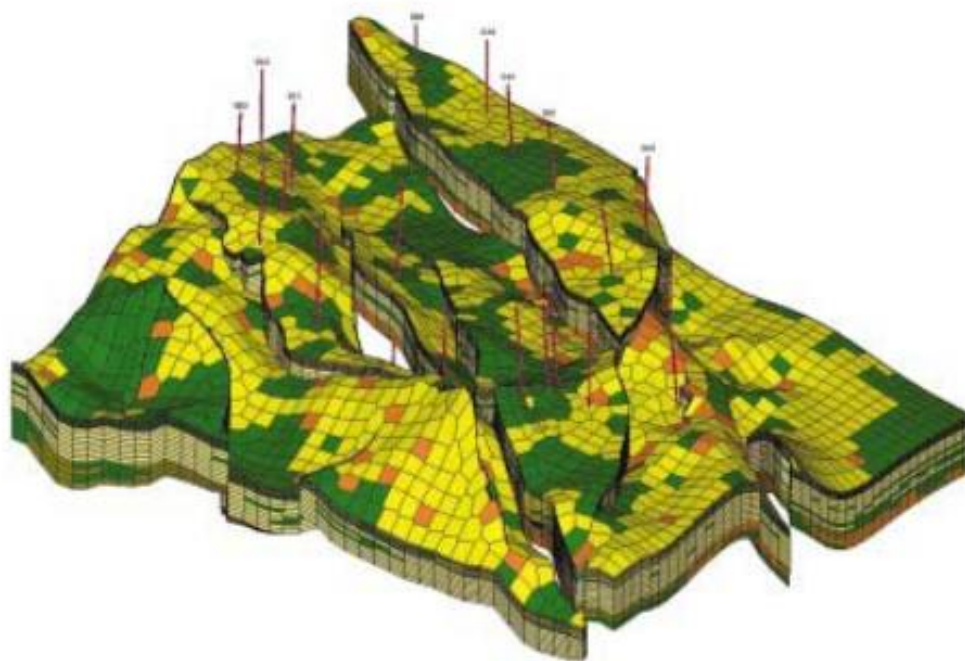
دانشگاه سمnan

دانشکده مهندسی نفت

۱۳۹۸

جلسه اول مجازی

دانشکده مهندسی شیمی و نفت
دانشگاه صنعتی شریف



شبیه‌سازی مدرن مخازن نفتی (۲۶۸۳۲)

TPG4160 RESERVOIR SIMULATION

SPRING SEMESTER 2018

Course content

The course gives the theoretical basis for numerical simulation of fluid flow in petroleum reservoirs. The partial differential equations required for single-phase and multi-phase fluid flow in porous media are developed, as well as numerical methods for solving the equation using finite difference methods. Input data requirements and applications of simulation models for history matching and prediction of field performance will be discussed.

Teachers

Professor Jon Kleppe jon.kleppe@ntnu.no

Assoc. Professor Carl Fredrik Berg carl.f.berg@ntnu.no

Web-pages

Blackboard (internal only)

<http://www.petroleum.ntnu.no/~kleppe/TPG4160> (external)

INTRODUCTION TO RESERVOIR SIMULATION

Analytical and numerical solutions of simple one-dimensional, one-phase flow equations

INTRODUCTION TO RESERVOIR SIMULATION

Analytical and numerical solutions of simple one-dimensional, one-phase flow equations

حل عددی و تحلیلی معادلات جریان یک فازی و یک بعدی

به عنوان مقدمه‌ای بر شبیه‌سازی مخزن، ساده‌ترین معادلات جریان یک بعدی را برای یک جریان افقی در نظر خواهیم گرفت و حل عددی و تحلیلی فشار را به عنوان تابعی از مکان و زمان خواهیم دید. این معادلات با استفاده از معادله پیوستگی، داریسی، تعریف تراکم‌پذیری و فرض ثابت گرفتن نفوذپذیری و تخلخل بدست می‌آیند. اینها، ساده‌ترین معادلات در دسترس هستند که جریان گذرای سیال را در مخزن توصیف می‌کنند.

جریان خطی

ورقه افقی ساده متخلخلی را در نظر بگیرید که در لحظه اول همه جای آن دارای فشار P_0 است. فشار را در طرف چپ (در $x = 0$) در لحظه $(t = 0^+)$ به مقدار P_L افزایش داده در حالی که طرف راست (در $x = L$) همان مقدار اولیه $P_R = P_0$ را داراست. سیستم در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ۱- هندسه سیستم (کنترل حجم) مثال یک بعدی.

جریان خطی

ورقه افقی ساده متخلخلی را در نظر بگیرید که در لحظه اول همه جای آن دارای فشار P_0 است. فشار را در طرف چپ (در $x = 0$) در لحظه $(t = 0^+)$ به مقدار P_L افزایش داده درحالی که طرف راست (در $x = L$) همان مقدار اولیه $P_R = P_0$ را داراست. سیستم در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ۱- هندسه سیستم (کنترل حجم) مثال یک بعدی.

معادله دیفرانسیل جزئی (PDE)

معادله حرکت سیال یک فازی، یک بعدی، افقی، در محیط متخلخل همگن (homogenous) همسانگرد (isotropic) و هم دما به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \frac{\partial P}{\partial t} \quad (1)$$

معادله دیفرانسیل جزئی (PDE)

معادله حرکت سیال یک فازی، یک بعدی، افقی، در محیط متخلخل همگن (homogenous) همسانگرد (isotropic) و هم‌دما به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \frac{\partial P}{\partial t} \quad (1)$$

قوانین (قانون) حاکم که منجر به فرمولاسیون PDE حاضر شده‌است، متشکل از قانون عام پیوستگی (بقای جرم) و قانون خاص داری می‌باشد. کمیت مجهول همان فشار است که مطلوب حل، عملاً توزیع فشار (معادله جریان یا معادله هیدرولیکی) در زمان‌های مختلف است. با ترکیب قوانین عام و خاص، به معادله حاکم بالا یعنی رابطه (۱) (با فرض ϕ ، μ ، c ، و k ثابت) رسیده‌ایم.

معادله دیفرانسیل جزئی (PDE)

معادله حرکت سیال یک فازی، یک بعدی، افقی، در محیط متخلخل همگن (homogenous) همسانگرد (isotropic) و هم‌دما به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \frac{\partial P}{\partial t} \quad (1)$$

نکته ۱: با یک معادله (و نه دستگاه) PDE روبرو هستیم.

معادله دیفرانسیل جزئی (PDE)

معادله حرکت سیال یک فازی، یک بعدی، افقی، در محیط متخلخل همگن (homogenous) همسانگرد (isotropic) و هم‌دما به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \frac{\partial P}{\partial t} \quad (1)$$

جریان گذرا و پایدار (یکنواخت)

طرف راست معادله فوق وابستگی به زمان را نشان می‌دهد. در آن صورت جریان گذرا، یا به عبارتی وابسته به زمان است. اگر جریان به حالتی برسد که دیگر به زمان وابسته نباشد، جریان پایدار یا یکنواخت (steady-state) است، که بر این اساس، معادله به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{d^2 P}{dx^2} = 0 \quad (2)$$

معادله دیفرانسیل جزئی (PDE)

معادله حرکت سیال یک فازی، یک بعدی، افقی، در محیط متخلخل همگن (homogenous) همسانگرد (isotropic) و هم‌دما به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \frac{\partial P}{\partial t} \quad (1)$$

شرایط اولیه (Initial Condition):

شرایط مرزی (Boundary Conditions):



شکل ۱- هندسه سیستم (کنترل حجم) مثال یک بعدی.

معادله دیفرانسیل جزئی (PDE)

معادله حرکت سیال یک فازی، یک بعدی، افقی، در محیط متخلخل همگن (homogenous) همسانگرد (isotropic) و هم‌دما به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \frac{\partial P}{\partial t} \quad (1)$$

شرایط اولیه (Initial Condition): $@t \leq 0 \text{ or } t = 0; \forall x : P = P_0 = P_R$

شرایط مرزی (Boundary Conditions):
 $\begin{cases} @x = 0 (\forall t > 0); P = P_L \\ @x = L (\forall t > 0); P = P_R \end{cases}$



شکل ۱- هندسه سیستم (کنترل حجم) مثال یک بعدی.

معادله دیفرانسیل جزئی (PDE)

معادله حرکت سیال یک فازی، یک بعدی، افقی، در محیط متخلخل همگن (homogenous) همسانگرد (isotropic) و هم‌دما به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \frac{\partial P}{\partial t} \quad (1)$$

شرایط اولیه (Initial Condition): $@t \leq 0 \text{ or } t = 0; \forall x : P = P_0 = P_R$

شرایط مرزی (Boundary Conditions): $\begin{cases} @x = 0 (\forall t > 0); P = P_L \\ @x = L (\forall t > 0); P = P_R \end{cases}$

نکته ۲: مرزها با عبارت تساوی و خیلی رگولار (!) نمایش داده شده‌اند،



شکل ۱- هندسه سیستم (کنترل حجم) مثال یک بعدی.

نکته ۳: یک فرق عمده معادلات PDE در مخازن با سایر معادلات PDE در زمینه‌های مهندسی شیمی، وجود نقاط یا مکان‌های تکینگی (singularity) می‌باشد. این مکان‌ها که تعبیر ریاضی تکینگی دارند، همان چاه‌های تزریق یا تولید هستند و موقع شرح روش حل عددی، باید آنها را مدّ نظر قرار داشت.

یک نقطه تکین (به انگلیسی: singular point) در ریاضیات نقطه‌ای است که یک عنصر ریاضی در آن تعریف نشده باشد، یا تابع به نوعی در آن خوشرفتار نباشد، مثلاً مشتق‌پذیر یا تحلیلی نباشد.

حل تحلیل معادله PDE خطی

حل تحلیلی گذرا برای معادله فوق به صورت زیر است:

$$P(x, t) = P_L + (P_R - P_L) \left[\frac{x}{L} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \exp \left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \frac{k}{\phi \mu c} t \right) \sin \left(\frac{n \pi x}{L} \right) \right) \right] \quad (3)$$

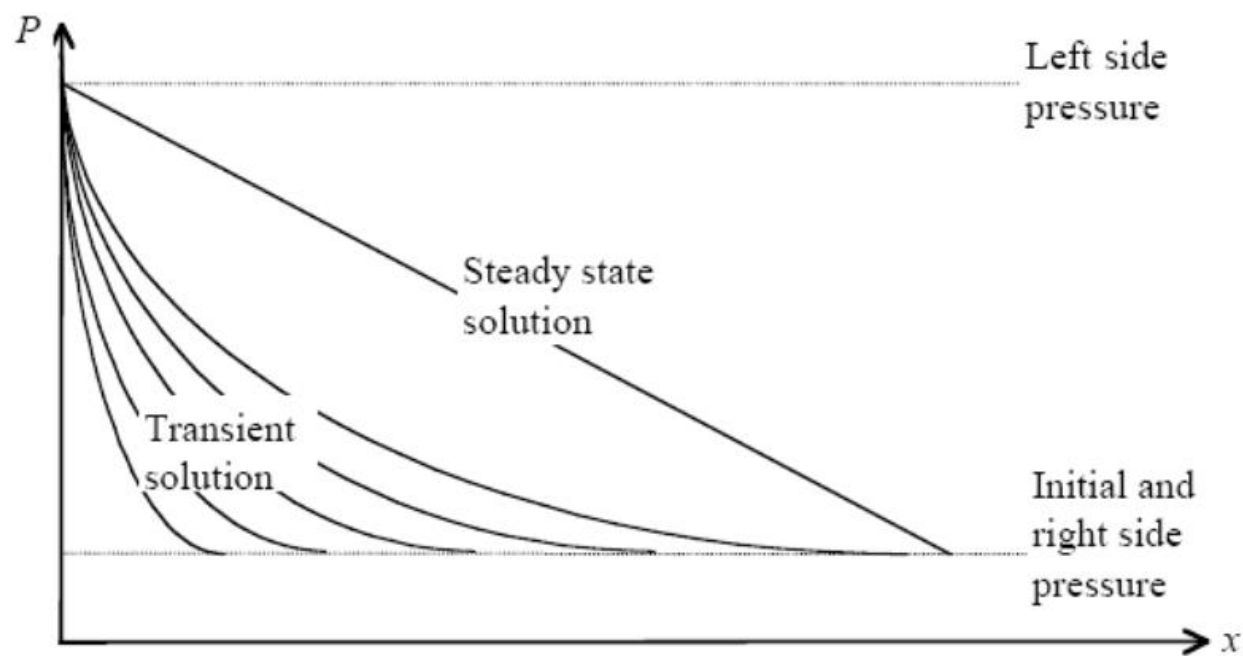
در برخی از کتب و منابع، معادله و جواب‌های PDE را به صورت بدون بُعد می‌نویسند تا روی تحلیل معادله، حساب اپراتوری و ساختار جواب متمرکز شوند، به طور مثال:

$$\bar{P} \text{ or } \theta \triangleq \frac{P - P_L}{P_R - P_L}, \quad \zeta \triangleq \frac{x}{L}, \quad \tau \triangleq t \frac{k}{\phi \mu c}$$

از جواب تحلیلی دیده می‌شود که با افزایش زمان، قسمت نمایی به صفر می‌رسد و حل به صورت زیر در می‌آید:

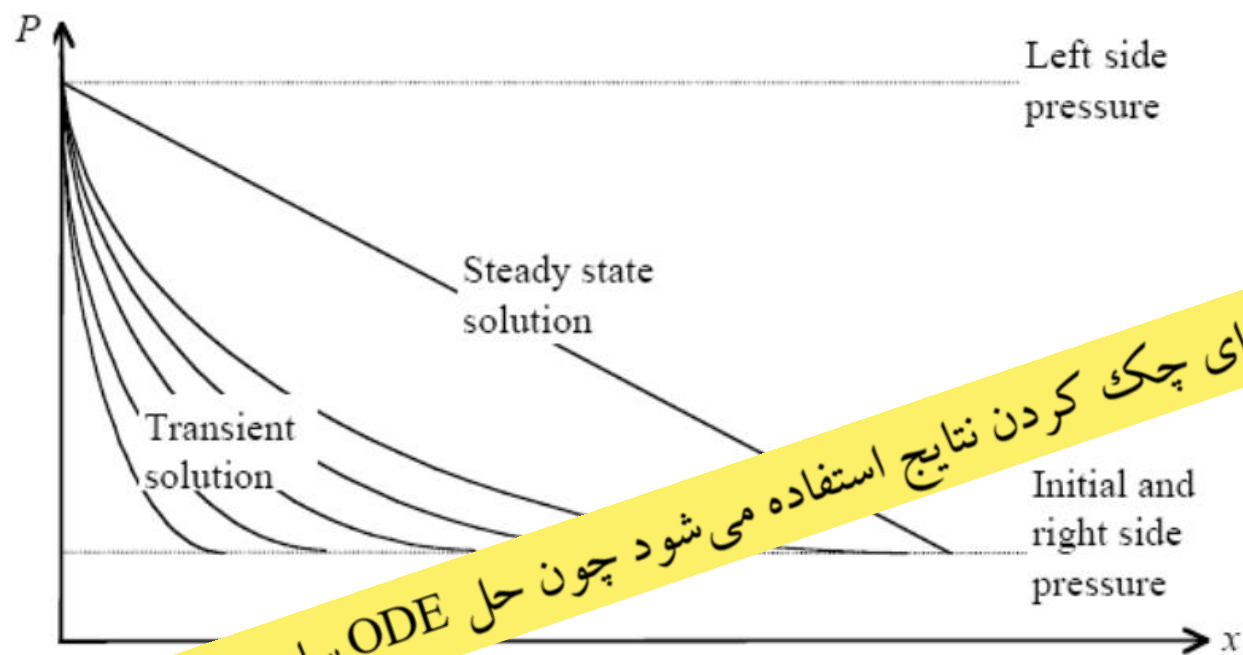
$$P(x, t) = P_L + (P_R - P_L) \frac{x}{L} \quad (4)$$

در شکل زیر (شکل ۲)، برای یک سیستمی که فشار اولیه در سمت راست و چپ آن برابر هستند، توزیع فشار در حالت گذرا و پایدار نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می شود، با توجه به خصوصیات سیستم، فشار در همه سیستم در پاره ای از زمان افزایش می یابد (حالت گذرا). سرانجام با گذر زمان، توزیع فشار به صورت خط راست بین دو فشار ابتدا و انتهای سیستم تبدیل می شود (حالت پایدار یا یکنواخت).



شکل ۲- توزیع فشار در زمانهای مختلف برای مثال مربوطه.

در شکل زیر (شکل ۲)، برای یک سیستمی که فشار اولیه در سمت راست و چپ آن برابر هستند، توزیع فشار در حالت گذرا و پایدار نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می شود، با توجه به خصوصیات سیستم، فشار در همه سیستم در پاره ای از زمان افزایش می یابد (حالت گذرا). سرانجام با گذر زمان، توزیع فشار به صورت خط راست بین دو فشار ابتدا و انتهای سیستم تبدیل می شود (حالت پایدار یا یکنواخت).



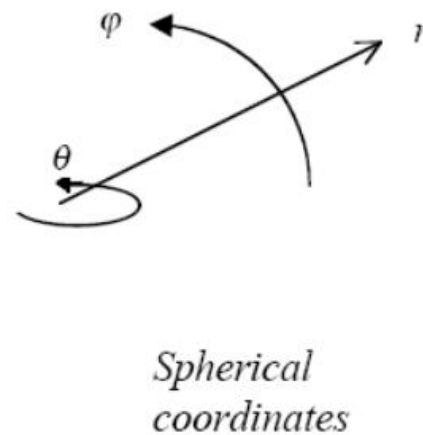
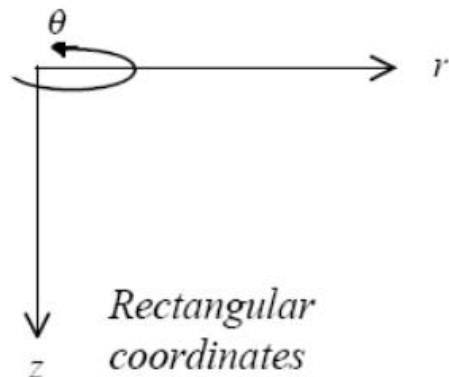
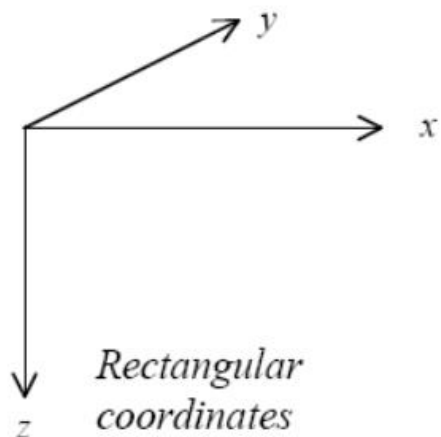
نکته ۴: از این حالت برای چک کردن نتایج استفاده می شود چون حل ODE ساده تر از PDE است.

شکل ۲- توزیع فشار در زمانهای مختلف برای مثال مربوط

نکته ۵: معادله PDE حاصله از نوع سهموی است ولی در حالت پایا از نوع بیضوی است. در شبیه‌سازی مخازن به‌ندرت به‌نوع هذلولوی برمی‌خوریم. این تقسیم‌بندی‌ها برای تشخیص روش حل یا تنظیم پارامترهای روش حل بدرد می‌خورد. در نرم‌افزارهای تجاری، این تنظیمات پشت صحنه انجام می‌شود و نیاز به دخالت کاربر ندارد.

سیستم‌های مختصات

به طور معمول، یکی از سیستم‌های مختصات مستطیلی یا استوانه‌ای در شبیه‌سازی مخزن استفاده می‌شود:



جریان شعاعی (معادله چاه آزمایی)

شکل دیگر معادله برای جریان مایع افقی و یک بعدی، معادله شعاعی است که به طور گسترده‌ای برای تفسیر داده‌های چاه آزمایی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این مورد، سطح جریان متناسب با r^2 است. معادله یک بعدی (شعاعی) جریان در مختصات استوانه به صورت زیر است:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (5)$$

حل معادله برای یک مخزن بسیار بزرگ همگن $P(r \rightarrow \infty) = P_i$ و دبی ثابت q از چاهی با شعاع r_w به صورت زیر است:

$$P = P_i + \frac{q \mu}{4\pi k h} Ei \left(-\frac{\phi \mu c r^2}{4kt} \right) \quad (6)$$

که در آن $Ei(-x) = -\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u} du$ به انتگرال نمایی معروف است.

حل پایدار برای یک سیستم بی‌نهایت بزرگ

وجود ندارد (!). زیرا تا زمانی که از چاه تولید می‌کنیم، فشار در طول سیستم کاهش خواهد یافت. البته اگر شرایط مرزی دیگری را استفاده کنیم، $P(r = r_w) = P_w$ و $P(r = r_e) = P_e$ ، می‌توانیم حل یکنواخت را بدست آوریم:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) = 0 \quad (7)$$

با دو بار انتگرال‌گیری، حل یکنواخت به صورت $P = P_w + (P_e - P_w) \ln(r/r_w) / \ln(r_e/r_w)$ به دست می‌آید.

حل پایدار برای یک سیستم بی‌نهایت بزرگ

وجود ندارد (!). زیرا تا زمانی که از چاه تولید می‌کنیم، فشار در طول سیستم کاهش خواهد یافت. البته اگر شرایط مرزی دیگری را استفاده کنیم، $P(r = r_w) = P_w$ و $P(r = r_e) = P_e$ ، می‌توانیم حل یکنواخت را بدست آوریم:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) = 0 \quad (7)$$

با دو بار انتگرال‌گیری، حل یکنواخت به صورت $P = P_w + (P_e - P_w) \ln(r/r_w) / \ln(r_e/r_w)$ به دست می‌آید.

نکته ۶: فرمولاسیون و معادله PDE حاصله معروف به معادله تست چاه (چاه آزمایی) می‌باشد. حل تحلیلی آن در ترجمه و تفسیر رکوردهای (log) چاه آزمایی به کار می‌رود ولی در این مقال (شبیه‌سازی مخازن) از معادله چاه آزمایی برای محاسبه تکنیکی و لحاظ کردن چاه اعم از تزریق و تولید استفاده می‌شود.

حل عددی

حل تحلیلی برای حرکت سیال (سیالات) در محیط متخلخل بسیار محدود است و از آن در قضاوت کیفی، آنالیز حساسیت، اعتبار سنجی (محک) حل عددی، بررسی رفتار فانکشنال دستگاه PDE و پرکردن برخی حفرات ریاضی نظیر جریان چاه استفاده می شود. به دست آوردن حل تحلیلی فقط با فرضیات ساده شونده در هندسه مخزن، خواص سنگ و سیال و شرایط مرزی ممکن می باشد. برای اخذ نتایج دقیق تر ولی با بار اطلاعاتی کمتر، نیازمند روش های عددی هستیم. روش های عددی دستگاه PDE از نظر ریاضی به سه دسته کلی تقسیم می شوند (ولی از نظر مصداق و تنوع روش تقریباً ۱۳۸۰۰ روش داریم !):

حل عددی

حل تحلیلی برای حرکت سیال (سیالات) در محیط متخلخل بسیار محدود است و از آن در قضاوت کیفی، آنالیز حساسیت، اعتبار سنجی (محک) حل عددی، بررسی رفتار فانکشنال دستگاه PDE و پرکردن برخی حفرات ریاضی نظیر جریان چاه استفاده می شود. به دست آوردن حل تحلیلی فقط با فرضیات ساده شونده در هندسه مخزن، خواص سنگ و سیال و شرایط مرزی ممکن می باشد. برای اخذ نتایج دقیق تر ولی با بار اطلاعاتی کمتر، نیازمند روش های عددی هستیم. روش های عددی دستگاه PDE از نظر ریاضی به سه دسته کلی تقسیم می شوند (ولی از نظر مصداق و تنوع روش تقریباً ۱۳۸۰۰ روش داریم !):

- روش های مبتنی بر تقریب جبری مشتق (معروف به FDM، مثل FDM Explicit، SOR، Crank-Nicholson و...
- روش های مبتنی بر تقریب تابع جواب یا روش های مانده وزنی (Weighted Residual) مثل FEM، FVM، Collocation و....
- روش های مبتنی بر حل انتگرال مثل BEM، GEM و....

گسته سازی

گسسته سازی

به عنوان مثال ساده‌ای، می‌خواهیم معادله خطی جریان را به صورت عددی با روش تقریب تفاضلات محدود استاندارد

برای جملات $\frac{\partial P}{\partial t}$ و $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$ حل کنیم. ابتدا مختصات x به تعدادی شبکه بلوک، گسسته و مختصات زمان به تعدادی گام زمانی تقسیم می‌شود. سپس فشار برای هر بلوک به صورت عددی برای هر گام زمان حل می‌شود. به عبارت خلاصه هدف تمامی روشهای تفاضلی (دیفرنس)، تبدیل دیفرنسیال‌ها (مشتقات پیوسته) به دیفرنسها (مشتقات گسسته) می‌باشد، یعنی

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \frac{\partial P}{\partial t}$$

برای جملات $\frac{\partial P}{\partial t}$ و $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$ حل کنیم. ابتدا مختصات x به تعدادی شبکه بلوک، گسسته و مختصات زمان به تعدادی گام زمانی تقسیم می‌شود. سپس فشار برای هر بلوک به صورت عددی برای هر گام زمان حل می‌شود. به عبارت خلاصه هدف تمامی روشهای تفاضلی (دیفرنس)، تبدیل دیفرنسیال‌ها (مشتقات پیوسته) به دیفرنسها (مشتقات گسسته) می‌باشد، یعنی

از یک (دستگاه) معادله دیفرانسیال (اعم از عادی یا پاره‌ای) شروع کرده و با روش‌های مقتضی تقریب‌زدن مشتقات
(به صورت جبری) در نهایت به یک دستگاه جبری (در صورت گسسته‌سازی کامل) یا دستگاه معادلات دیفرانسیال عادی (در
صورت گسسته‌سازی فقط مکان) که حل آن مانوس‌تر و آشناترست می‌رساند.

از یک (دستگاه) معادله دیفرنسیال (اعم از عادی یا پاره‌ای) شروع کرده و با روش‌های مقتضی تقریب‌زدن مشتقات (به صورت جبری) در نهایت به یک دستگاه جبری (در صورت گسسته‌سازی کامل) یا دستگاه معادلات دیفرنسیال عادی (در صورت گسسته‌سازی فقط مکان) که حل آن مانوس‌تر و آشنا ترست می‌رساند. علت تنوع و تکثر این روشها، اختلاف در نحوه تقریب، میزان دقت مشتقات پیوسته و درجه سازگاری مراتب مختلف مشتقات می‌باشد. برای گسسته‌سازی مراتب مختلف مشتق کمّیات پیوسته، بالغ بر ۲۲ روش وجود دارد که هر کدام مزایا و معایب خود را چه از نظر دقت محاسباتی، مقاوم بودن به پخش خطای عددی و راحتی در پیاده‌سازی کامپیوتری (ایندکس گذاری تیپ) دارا می‌باشند. به هر حال دو روش ساده تیلور (آنالیز کلاسیک، تقریب تابع) و روش انتگرالی (با تعبیر و تفسیر فیزیکی) از همه رایج‌ترند. در این وجیزه به‌طور یکدست از روش بسط تیلور در معرفی انواع تقریب‌ها بهره‌گیری شده‌است.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \frac{\partial P}{\partial t}$$

گسسته‌سازی مکان:

چون سیستم از نظر مکان یک‌بعدی است، لذا دامنه حل را گسسته می‌کنیم. دو روش برای گسسته‌سازی مکان متداول است. روش Block-Centered و روش Mesh-Centered، (شکل ۳).

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \frac{\partial P}{\partial t}$$

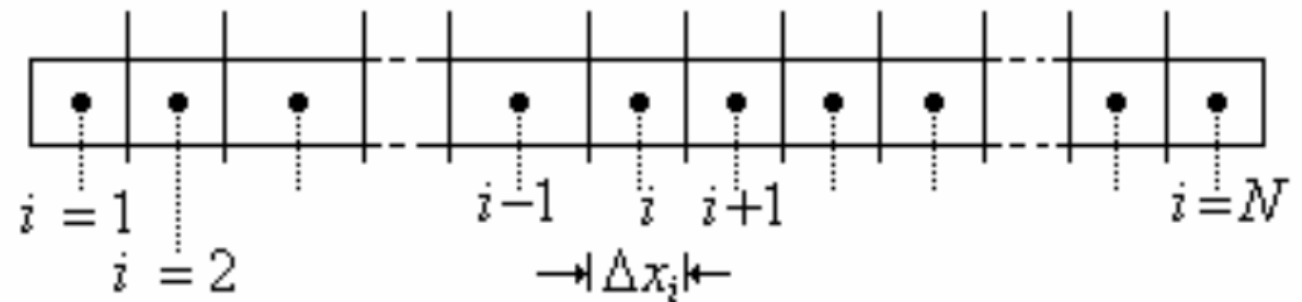
گسسته‌سازی مکان:

چون سیستم از نظر مکان یک‌بعدی است، لذا دامنه حل را گسسته می‌کنیم. دو روش برای گسسته‌سازی مکان متداول است. روش Block-Centered و روش Mesh-Centered، (شکل ۳).

روش Block-Centered

تعداد بلوک‌ها و ایندکس‌ها: N

گستره ایندکس: $i = 1, 2, 3, \dots, N$



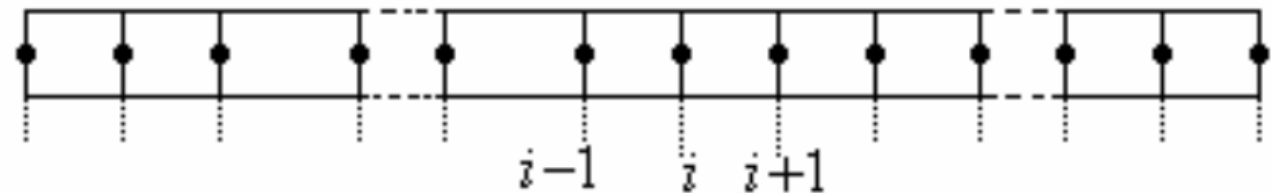
روش Mesh-Centered

تعداد بلوک‌ها: N

تعداد ایندکس‌ها: $N + 1$

گستره ایندکس: $i = 0, 1, 2, 3, \dots, N$

یا $i = 1, 2, 3, \dots, N + 1$



شکل ۳- دو روش ایندکس گذاری برای گسسته‌سازی.

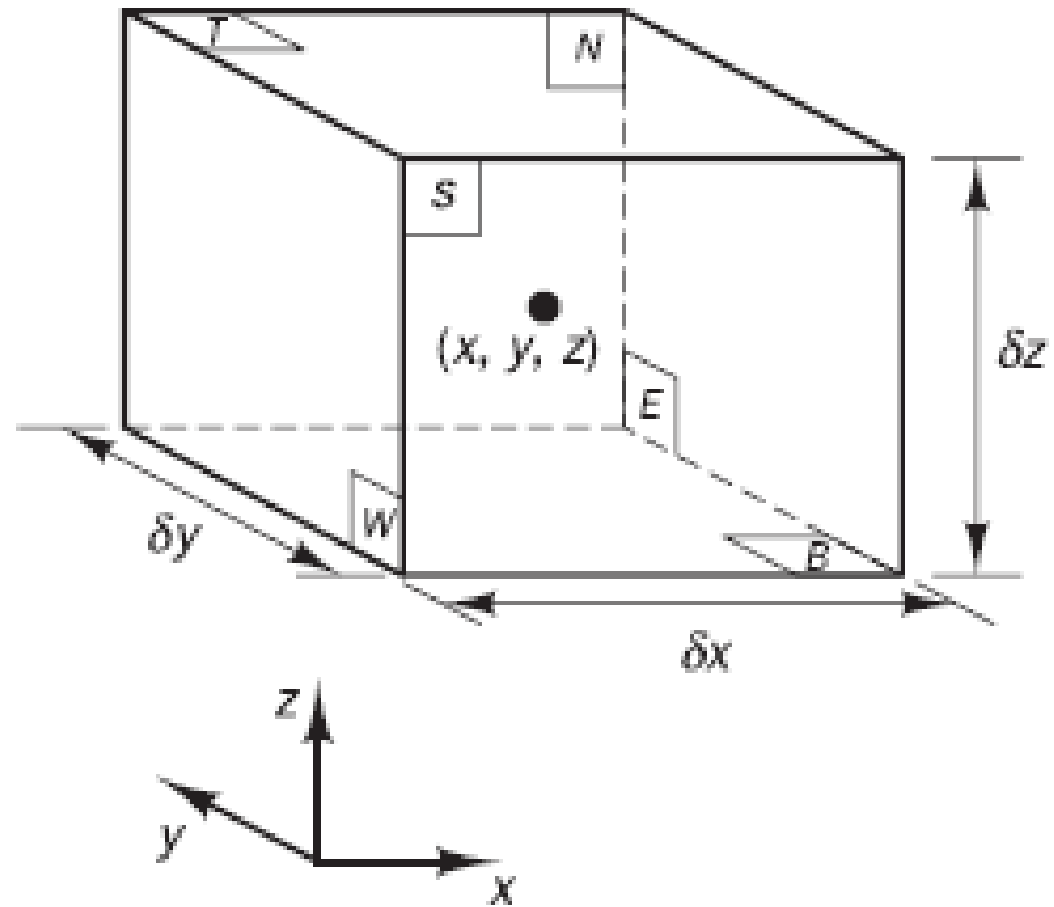
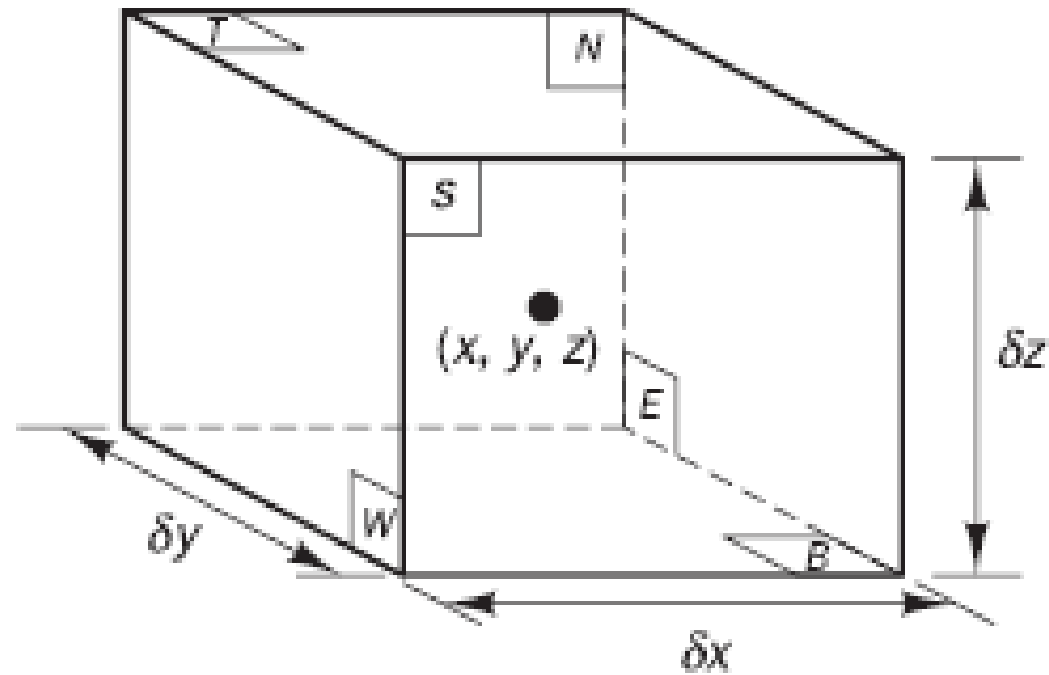
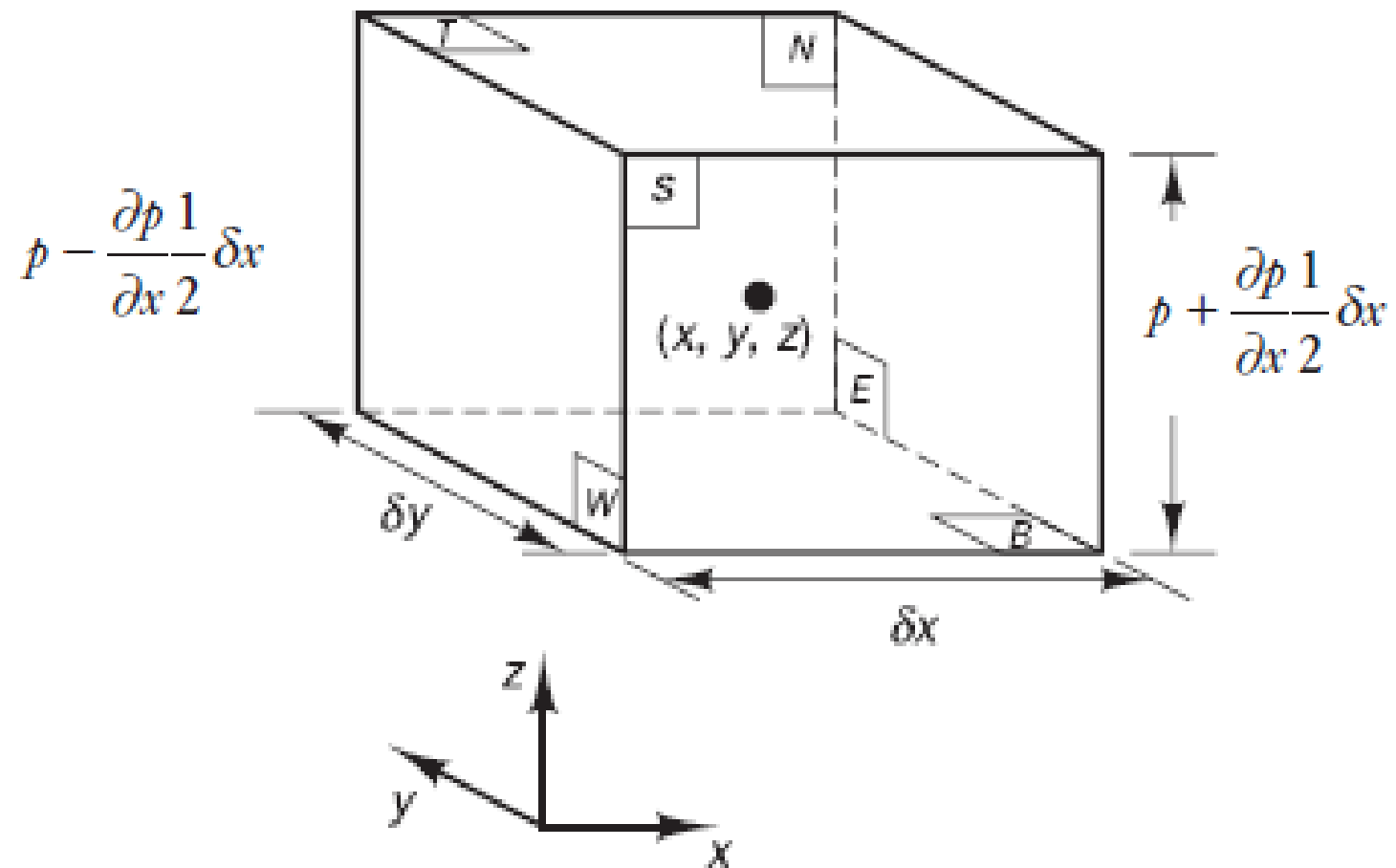


Figure 2.1 Fluid element for conservation laws



All fluid properties are functions of space and time so we would strictly need to write $\rho(x, y, z, t)$, $p(x, y, z, t)$, $T(x, y, z, t)$ and $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ for the density, pressure, temperature and the velocity vector respectively. To avoid



$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \frac{\partial P}{\partial t}$$

گسسته‌سازی مکان:

چون سیستم از نظر مکان یک بعدی است، لذا دامنه حل را گسسته می‌کنیم. دو روش برای گسسته‌سازی مکان متداول است. روش Block-Centered و روش Mesh-Centered، (شکل ۳).

دو روش گسسته‌سازی اشاره شده، هر کدام معایب و مزایای خود را دارند که بیشتر در زمینه پیاده‌سازی کامپیوتر (از نظر اجرایی) و برخورد با شرایط مرزی (از نظر فرمولاسیون) با هم تفاوت دارند. در ادامه از روش Block-Centered استفاده خواهد شد.

تقریب سری تیلور :

تقریب سری تیلور برای هر تابعی را می توان بر حسب مقادیر همان تابع و مشتق های آن نوشت. در ادامه به سه فرم رایج بسط تیلور برای توابع یک متغیره می پردازیم:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + HOT \quad (۸) \text{ (نمایش ریاضی)}$$

تقریب سری تیلور :

تقریب سری تیلور برای هر تابعی را می توان بر حسب مقادیر همان تابع و مشتق های آن نوشت. در ادامه به سه فرم رایج بسط تیلور برای توابع یک متغیره می پردازیم:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + HOT \quad (8) \text{ (نمایش ریاضی)}$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'|_{x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''|_{x_0} + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''|_{x_0} + HOT \quad (9) \text{ (نمایش چند جمله ای)}$$

تقریب سری تیلور :

تقریب سری تیلور برای هر تابعی را می توان بر حسب مقادیر همان تابع و مشتق های آن نوشت. در ادامه به سه فرم رایج بسط تیلور برای توابع یک متغیره می پردازیم:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + HOT \quad (8) \text{ (نمایش ریاضی)}$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'|_{x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''|_{x_0} + \frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''|_{x_0} + HOT \quad (9) \text{ (نمایش چند جمله ای)}$$

$$f_{i+1} = f_i + \frac{h}{1!}f'_i + \frac{h^2}{2!}f''_i + \frac{h^3}{3!}f'''_i + HOT \quad (10) \text{ (نمایش ایندکسی)}$$

(اکنونیم HOT به مفهوم Higher Order Terms می باشد)

تقریب سری تیلور :

تقریب سری تیلور برای هر تابعی را می توان بر حسب مقادیر همان تابع و مشتق های آن نوشت. در ادامه به سه فرم رایج بسط تیلور برای توابع یک متغیره می پردازیم:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + HOT \quad (8) \text{ (نمایش ریاضی)}$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'|_{x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''|_{x_0} + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''|_{x_0} + HOT \quad (9) \text{ (نمایش چند جمله ای)}$$

$$f_{i+1} = f_i + \frac{h}{1!} f'_i + \frac{h^2}{2!} f''_i + \frac{h^3}{3!} f'''_i + HOT \quad (10) \text{ (نمایش ایندکسی)}$$

(اکنونیم HOT به مفهوم Higher Order Terms می باشد)

از بسط تیلور برای خطی سازی ژاکوبین، تشکیل فرم دوخطی (کوادرانتیک یا مجذوری)، تقریب دقیق (لاگرانژین)، تشکیل جداول تفاضل، قضایای بهینه سازی و از همه مهم تر تقریب مراتب مختلف مشتق تابع بر حسب مقادیر تابع در گره های مختلف و مقتضی می باشد.

$$f_{i+1} = f_i + \frac{h}{1!} f_i' + \frac{h^2}{2!} f_i'' + \frac{h^3}{3!} f_i''' + HOT$$

(۱۰) (نمایش ایند کسی)

(۱۰) (نمایش ایندکسی)

$$f_{i+1} = f_i + \frac{h}{1!}f_i' + \frac{h^2}{2!}f_i'' + \frac{h^3}{3!}f_i''' + HOT$$

برای دستگرمی، بینیم مشتق اول تابع در محل x (ایندکس i) به چند شکل بدست می‌آید. محض سهولت و سادگی فرض می‌کنیم فواصل گسسته متساوی الفاصله باشند یعنی h یا Δx ثابت است.

۱- معادله ۱۰ را در نظر گرفته و با بازآرایی f_i' را محاسبه می‌کنیم:

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + R_i^f \quad \text{or} \quad f_i'^f = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \quad (11)$$

به طوریکه

$$R_i^f = -\frac{h^1}{2!}f_i'' - \frac{h^2}{3!}f_i'''$$

در معادله ۱۱، عبارت $\frac{f_{i+1} - f_i}{h}$ موسوم به تقریب تفاضلی (دیفرنس) پیشرو می‌باشد. وجه تسمیه پیشرو اینست که ما

تقریب مشتق را در ایندکس i می‌خواهیم ولی علاوه بر مقدار تابع در همان ایندکس (f_i) نیاز به مقدار تابع در یک

ایندکس جلوتر یا پیشرو (f_{i+1}) داریم.

علت بالانویس f در جملات باقیمانده (نمایش داده شده با R_i^f) نیز به همین

خاطرست و می‌گوییم این خطای برش (truncation) محلی است چون ایندکس دارد. در برخی کتب مرجع خطای محلی را با حرف کوچک o (به معنی محلی) و همراه با کوچکترین توان h یا Δx نمایش می‌دهند، یعنی

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + o(h) \quad (12)$$

در اینصورت می‌گویند تقریب تفاضلی پیشرو از مرتبه اول صحیح (first-order correct) است، یعنی با نصف کردن گام‌ها، خطا نیز به طور خطی نصف می‌شود.

۲- معادله ۱۰ را در نظر گرفته ولی با $-h$ کار کنید، یعنی

$$f_{i-1} = f_i - \frac{h}{1!}f_i' + \frac{h^2}{2!}f_i'' - \frac{h^3}{3!}f_i''' + HOT \quad (13)$$

حال با بازآرایی f_i' را محاسبه می کنیم:

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + R_i^b \quad or \quad f_i'^b = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \quad (14)$$

$$R_i^b = \frac{h^1}{2!}f_i'' - \frac{h^2}{3!}f_i''' + \dots \quad \text{به طوریکه}$$

بدین ترتیب تقریب تفاضلی پسرو از f_i' خواهیم داشت. بالانویس b برای ترم باقیمانده به این خاطرست که معادله ۱۴

تقریب پسرو از f_i' را بدست داده است. این خطا نیز از مرتبه اول صحیح است.

۳- حال بسط تیلور پسرو، یعنی رابطه ۱۳ را از بسط تیلور پیشرو یعنی رابطه ۱۰ کم کنید و سپس بازآرایی کنید تا f_i' بدست آید:

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + R_i^c \quad \text{or} \quad f_i'^c = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad (15)$$

$$R_i^c = -\frac{h^2}{3!}f_i''' - \frac{h^4}{5!}f_i^{IV} - \dots \quad \text{به طوریکه}$$

به تقریب جبری f_i' در رابطه ۱۵ می گویند تقریب تفاضلی میانی یا سانترال، چون از مقادیر تابع یکی قبل و یکی بعد استفاده می کند. همچنین به خطای محلی R_i^c توجه کنید که این دفعه صحیح از مرتبه دوم است چون کوچکترین توان آن ۲ می باشد. به عبارتی اگر h را نصف کنیم و از تقریب تفاضلی میانی استفاده کنیم آنگاه خطای برش عددی به ربع مقدار قبلی تقلیل می یابد نه نصف!

نکته ۷: دقت شود تقریب میانی، خود متوسط دو مشتق تفاضلی پیشرو و پسرو می باشد:

$$f_i'^c = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1} + (f_i - f_i)}{2h} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \right\} = \frac{1}{2} (f_i'^f + f_i'^b)$$

به طور خلاصه، با استفاده از سری تیلور برای تابع فشار، با روش های گوناگونی، می توان تقریبی برای مشتقات موجود در معادله خطی جریان بدست آورد.

تقریب مشتق مرتبه دوم مکان :

در زمان ثابت، تابع فشار را در یک نقطه به صورت پیشرو (Forward) و پسرو (Backward) می توان بسط داد:

$$P(x + \Delta x, t) = P(x, t) + \frac{\Delta x}{1!} P'(x, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} P''(x, t) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} P'''(x, t) + \dots \quad (16)$$

$$P(x - \Delta x, t) = P(x, t) + \frac{(-\Delta x)}{1!} P'(x, t) + \frac{(-\Delta x)^2}{2!} P''(x, t) + \frac{(-\Delta x)^3}{3!} P'''(x, t) + \dots \quad (17)$$

با جمع کردن این دو عبارت و حل آن برای مشتق مرتبه دوم داریم:

$$P''(x, t) = \frac{P(x + \Delta x, t) - 2P(x, t) + P(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} + \frac{(\Delta x)^2}{12} P'''(x, t) + \dots \quad (18)$$

با استفاده از سیستم اندیس گذاری و بالانویسی برای زمان، معادله فوق به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_i^t = \frac{P_{i+1}^t - 2P_i^t + P_{i-1}^t}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad (19)$$

به این معادله تقریب مرکزی یا میانی (Central) مشتق مرتبه دوم گویند. بقیه جمله‌های بسط تیلور در عبارت $O(\Delta x^2)$ قرار داده شده است که نشان می‌دهد متناسب با Δx^2 اند. جمله $O(\Delta x^2)$ که گاهی اوقات به آن خطای گسسته‌سازی می‌گویند، که در اینجا از مرتبه دوم است، در حل عددی حذف می‌شود.

هر چه بلوک‌های ریزتری استفاده شود خطای کمتری با حذف $O(\Delta x^2)$ وارد جواب می‌شود. هرگام زمانی می‌تواند در بسط فوق مورد استفاده قرار گیرد. لذا، برای زمان‌های $t + \Delta t$ و $t + \Delta t / 2$ معادله به صورت زیر تبدیل می‌شود (به ترتیب):

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_i^{t+\Delta t} = \frac{P_{i+1}^{t+\Delta t} - 2P_i^{t+\Delta t} + P_{i-1}^{t+\Delta t}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad (20)$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_i^{t+\Delta t/2} = \frac{P_{i+1}^{t+\Delta t/2} - 2P_i^{t+\Delta t/2} + P_{i-1}^{t+\Delta t/2}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad (21)$$

تقریب مشتق زمان:

در هر مکان ثابت، تابع فشار را نسبت به زمان در جهت پیشرو می توان بسط داد:

$$P(x, t + \Delta t) = P(x, t) + \frac{\Delta t}{1!} \dot{P}(x, t) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \ddot{P}(x, t) + \frac{(\Delta t)^3}{3!} \dddot{P}(x, t) + \dots \quad (22)$$

که با حل آن برای مشتق مرتبه اول، عبارت زیر به دست می آید:

$$\dot{P}(x, t) = \frac{P(x, t + \Delta t) - P(x, t)}{(\Delta t)} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{P}(x, t) + \dots \quad (23)$$

و با استفاده از سیستم اندیس گذاری داریم:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_i^t = \frac{P_i^{t+\Delta t} - P_i^t}{(\Delta t)} + O(\Delta t) \quad (24)$$

در اینجا جمله خطا با $O(\Delta t)$ متناسب است، یعنی از مرتبه اول. در این مورد خطا با سرعت کمتری نسبت به جمله مرتبه دوم به صفر می‌رسد. عبارت بالا را تقریب پیشرو زمان گویند.

.. بسط پسرو در زمان را دو گونه می توان نوشت:

$$P(x, t) = P(x, t + \Delta t) + \frac{-\Delta t}{1!} \dot{P}(x, t + \Delta t) + \frac{(-\Delta t)^2}{2!} \ddot{P}(x, t + \Delta t) + \dots \quad (25)$$

$$P(x, t - \Delta t) = P(x, t) + \frac{-\Delta t}{1!} \dot{P}(x, t) + \frac{(-\Delta t)^2}{2!} \ddot{P}(x, t) + \frac{(-\Delta t)^3}{3!} \ddot{P}(x, t) + \dots \quad (26)$$

معادله زیر از حل آنها برای مشتق مرتبه اول زمان به دست می آید (به ترتیب):

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_i^{t+\Delta t} = \frac{P_i^{t+\Delta t} - P_i^t}{(\Delta t)} + O(\Delta t) \quad (27)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_i^t = \frac{P_i^t - P_i^{t-\Delta t}}{(\Delta t)} + O(\Delta t) \quad (28)$$

$$P(x, t) = P(x, t + \Delta t) + \frac{-\Delta t}{1!} \dot{P}(x, t + \Delta t) + \frac{(-\Delta t)^2}{2!} \ddot{P}(x, t + \Delta t) + \dots \quad (25)$$

$$P(x, t - \Delta t) = P(x, t) + \frac{-\Delta t}{1!} \dot{P}(x, t) + \frac{(-\Delta t)^2}{2!} \ddot{P}(x, t) + \frac{(-\Delta t)^3}{3!} \dddot{P}(x, t) + \dots \quad (26)$$

دقت شود برای تقریبهای تفاضلی در گسسته‌سازی زمانی به شکل دیگری و متفاوت با تقاریب تفاضلی مکانی عمل می‌کنیم، یعنی برای تقریب پسروی زمانی از رابطه ۲۵ استفاده می‌کنیم و نه رابطه ۲۶. علت اینست که در شکل نهایی دستگاه معادلات جبری بردار مجهولات عبارتند از کمیات دیفرنسیالی مجهول در لحظه بعدی! این کار هم طبیعیست و هم عقلایی، چون از شرایط اولیه (زمان صفر) شروع کرده و به‌طور غیربازگشت‌پذیر در طول زمان به جلو می‌رویم، لذا مناسب اینست که همیشه $t + \Delta t$ بینیم و نه $t - \Delta t$.

$$P(x, t) = P(x, t + \Delta t) + \frac{-\Delta t}{1!} \dot{P}(x, t + \Delta t) + \frac{(-\Delta t)^2}{2!} \ddot{P}(x, t + \Delta t) + \dots \quad (25)$$

$$P(x, t - \Delta t) = P(x, t) + \frac{-\Delta t}{1!} \dot{P}(x, t) + \frac{(-\Delta t)^2}{2!} \ddot{P}(x, t) + \frac{(-\Delta t)^3}{3!} \dddot{P}(x, t) + \dots \quad (26)$$

دقت شود برای تقریبهای تفاضلی در گسسته‌سازی زمانی به شکل دیگری و متفاوت با تقاریب تفاضلی مکانی عمل می‌کنیم، یعنی برای تقریب پسروی زمانی از رابطه ۲۵ استفاده می‌کنیم و نه رابطه ۲۶. علت اینست که در شکل نهایی دستگاه معادلات جبری بردار مجهولات عبارتند از کمیات دیفرنسیالی مجهول در لحظه بعدی! این کار هم طبیعیست و هم عقلایی، چون از شرایط اولیه (زمان صفر) شروع کرده و به‌طور غیربازگشت‌پذیر در طول زمان به جلو می‌رویم، لذا مناسب اینست که همیشه $t + \Delta t$ بینیم و نه $t - \Delta t$.

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_i^t = \frac{P_i^{t+\Delta t} - P_i^t}{(\Delta t)} + O(\Delta t) \quad (24)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_i^{t+\Delta t} = \frac{P_i^{t+\Delta t} - P_i^t}{(\Delta t)} + O(\Delta t) \quad (27)$$

نکته ۸: عبارت بالا (یعنی رابطه ۲۷) شبیه عبارت قبلی (یعنی رابطه ۲۴) است اما در این مورد، تقریب پسرو هست!، نحوه تشخیص در بالانویس عبارت سمت چپ هست، فافهم.

برای تقریب تفاضلی میانی برای گسسته سازی زمان به این شکل عمل می کنیم: با گام $\Delta t / 2$ برای زمان و استفاده از زمان تقریب پسرو و پیشرو عبارت جایگزین دیگری برای مشتق زمان بدست می آید:

$$P\left(x, t + \frac{\Delta t}{2}\right) = P\left(x, t + \frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{\Delta t / 2}{1!} \dot{P}\left(x, t + \frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{(\Delta t / 2)^2}{2!} \ddot{P}\left(x, t + \frac{\Delta t}{2}\right) + \dots \quad (29)$$

$$P(x, t) = P\left(x, t + \frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{-\Delta t / 2}{1!} \dot{P}\left(x, t + \frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{(-\Delta t / 2)^2}{2!} \ddot{P}\left(x, t + \frac{\Delta t}{2}\right) + \dots \quad (30)$$

با ترکیب این دو عبارت، تقریب مرکزی برای مشتق زمان، با جمله خطای مرتبه دوم بدست می آید:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_i^{t+\Delta t/2} = \frac{P_i^{t+\Delta t} - P_i^t}{(\Delta t)} + O(\Delta t^2) \quad (31)$$

معادله تفاضل صریح (Explicit)

با در نظر گرفتن زمان t و تقریب‌های تفاضل محدود فوق و جایگزینی آنها در معادله خطی جریان عبارت زیر، معادله تفاضل، به دست می‌آید:

$$\frac{P_{i+1}^t - 2P_i^t + P_{i-1}^t}{(\Delta x)^2} \approx \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \frac{P_i^{t+\Delta t} - P_i^t}{(\Delta t)}, \quad i = 1, \dots, N \quad (32)$$

برای راحتی جمله خطا از معادله بالا حذف شده‌است. همچنین رابطه تساوی با رابطه تقریب جایگزین شده‌است. باید توجه داشت که خطای وارد شده در حل عددی معادله جریان متناسب با Δt و Δx^2 است (به ترتیب).

شرایط مرزی (BC's)

نیروی رانش برای جریان از BC's حاصل می شود. اساساً دو نوع BC's وجود دارد. شرط فشار (شرط دیریلکه) و شرط دبی جریان (شرط نیومن).

نکته ۹: از دیدگاه ریاضی (حل معادلات پاره‌ای) با ۸ نوع ترکیبی شرای مرزی سروکار خواهیم داشت، ولی در اینجا محض سهولت به دو شرط اساسی آن می پردازیم.

شرط فشار:

وقتی فشار در مرزها معلوم شده باشد، در معادلات، فشار در دو طرف سیستم مشخص می‌شود. برای سیستم خطی توصیف شده، داریم:

$$P(x = 0, t > 0) = P_L$$

$$P(x = L, t > 0) = P_R$$

و با استفاده از سیستم اندیس گذاری:

$$P_{i=1/2}^{t>0} = P_L$$

$$P_{i=N+1/2}^{t>0} = P_R$$

علت استفاده از $i = 1/2$ و $i = N + 1/2$ آن است که BC's به دو طرف انتهایی سیستم اعمال می‌شود. (اولی در طرف چپ بلوک اول $i = 1/2$ و دومی در طرف راست بلوک آخر $i = N + 1/2$). بنابراین BC's به طور مستقیم نمی‌توانند در معادله تفاضل جایگذاری شوند. البته با استفاده از سری تیلور می‌توان برای بلوک 1 و N معادلات جدیدی به دست آورد:

$$P(x_2, t) = P(x_1, t) + \frac{\Delta x}{1!} P'(x_1, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} P''(x_1, t) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} P'''(x_1, t) + \dots$$

$$P(x=0, t) = P(x_1, t) + \frac{(-\Delta x/2)}{1!} P'(x_1, t) + \frac{(-\Delta x/2)^2}{2!} P''(x_1, t) + \frac{(-\Delta x/2)^3}{3!} P'''(x_1, t) + \dots$$

که با ترکیب دو عبارت، تقریب مشتق مرتبه دوم در بلوک یک بدست می آید:

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_1^t = \frac{P_2^t - 3P_1^t + 2P_L}{\frac{3}{4}(\Delta x)^2} + O(\Delta x)$$

یک عیب این روش آن است که جمله خطا برای این نوع فرمولاسیون از مرتبه یک یعنی متناسب با Δx است. با روشی مشابه برای بلوک N داریم:

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_N^t = \frac{2P_R - 3P_N^t + P_{N-1}^t}{\frac{3}{4}(\Delta x)^2} + O(\Delta x)$$

در مورد مخازن واقعی، شرایط مرزی فشار، در مورد فشار ته چاه P_{bh} یا فشار سر چاه P_{wh} برای چاه‌های تولید یا تزریق استفاده می‌شود.

شرط مرزی دبی جریان:

متقابلاً، دبی جریان به سمت داخل یا خارجِ کناره‌های سیستم، می‌تواند معین شود. برای مثال دبی که از طرف چپ سیستم وارد می‌شود Q_L با توجه به آنکه دبی می‌تواند با قانون دارسی محاسبه شود، داریم:

$$Q_L = -\frac{kA}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{x=0}$$

با استفاده از سری تیلور برای بلوک یک، و بسط مشتق فشار به عنوان تابع داریم:

$$P'(x_1 + \Delta x / 2, t) = P'(x_1, t) + \frac{(\Delta x / 2)}{1!} P''(x_1, t) + \frac{(\Delta x / 2)^2}{2!} P'''(x_1, t) + \dots$$

$$P'(x = 0, t) = P'(x_1, t) + \frac{(-\Delta x / 2)}{1!} P''(x_1, t) + \frac{(-\Delta x / 2)^2}{2!} P'''(x_1, t) + \dots$$

با تفریق عبارت دوم از اول و حل آن برای مشتق مرتبه دوم، عبارت زیر برای بلوک ۱ به دست می‌آید:

$$P''(x_1, t) = \frac{P'(x_1 + \Delta x / 2, t) - P'(x = 0, t)}{\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

حال با جایگزینی مشتق در $x = 0$ با شرط مرزی داریم:

$$P''(x_1, t) = \frac{P'(x_1 + \Delta x / 2, t) - Q_L \frac{\mu}{kA}}{\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

مشتق دیگر در عبارت فوق را می‌توان با تقریب مرکزی جایگزین کرد:

$$P'(x_1 + \Delta x / 2, t) = \frac{P(x_2, t) - P(x_1, t)}{\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

بنابراین شکل نهایی مشتق مرتبه دوم برای بلوک اول با شرط مرزی فوق به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_1^t = \frac{P_2^t - P_1^t}{\Delta x^2} + Q_L \frac{\mu}{kA \Delta x} + O(\Delta x)$$

مشابه آن، برای دبی ثابت در طرف راست سیستم، Q_R ، داریم:

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_N^t = \frac{P_N^t - P_{N-1}^t}{\Delta x^2} - Q_R \frac{\mu}{kA \Delta x} + O(\Delta x)$$

در یک مخزن واقعی، شرط دبی جریان، بیان کننده دبی تولید یا تزریق برای چاه‌ها است. یک مورد ویژه برای مرزهای

بدون جریان (No flow boundary) است ($Q = 0$). این شرط در مرزهای با لایه‌های نفوذناپذیر و گسل‌ها، در مخزن

می‌تواند دیده شود.

شرط اولیه (IC) :

شرط اولیه (فشار اولیه) برای سیستم افقی در طول سیستم، به صورت زیر معلوم می شود:

$$P_i^{t=0} = P_0 \quad i = 1, \dots, N$$

برای سیستم‌های غیرافقی، فشار هیدرواستاتیکی به عنوان فشار اولیه برای هر بلوک با توجه به سطح مبنا و چگالی سیالات محاسبه می شود.

حل معادله تفاضل:

با بدست آوردن معادله تفاضل و داشتن BC's و IC می توانیم آن را برای فشار حل کنیم. البته مطلب مهم زیر باید مورد توجه قرار گیرد. برای بدست آوردن تقریب تفاضل، از زمان t در سری تیلور استفاده شد. بدیهی است می توانستیم از زمان $t + \Delta t$ با همان عمومیت معادله، هم استفاده کنیم یا حتی از $t + \Delta t / 2$. موارد اشاره شده، بحث خواهند شد. ابتدا از فرمولاسیون صریح استفاده می کنیم. برای راحتی جمله های خطا را حذف می کنیم.

فرمولاسیون صریح (Explicit)

معادله اشاره شده در صفحات قبل به این گونه است. به وسیله تقریب همه جملات در زمان t ، ما می‌توانیم فشار متوسط هر بلوک را به طور صریح با حل معادلات تفاضل بدست آوریم. (در عبارت زیر شرایط مرزی به صورت فشار ثابت در مرزها در نظر گرفته شده‌اند. اگر شرایط برای دبی ثابت باشد، معادلات باید بر طبق آن اصلاح شوند).

$$P_1^{t+\Delta t} = P_1^t + \frac{4}{3} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) \left(\frac{k}{\phi \mu c} \right) (P_2^t - 3P_1^t + 2P_L)$$

$$P_i^{t+\Delta t} = P_i^t + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) \left(\frac{k}{\phi \mu c} \right) (P_{i+1}^t - 2P_i^t + P_{i-1}^t) \quad i = 2, \dots, N-1$$

$$P_N^{t+\Delta t} = P_N^t + \frac{4}{3} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) \left(\frac{k}{\phi \mu c} \right) (2P_R^t - 3P_N^t + P_{N-1}^t)$$

فرمولاسیون ضمنی:

در این روش همه جملات در زمان $t + \Delta t$ تقریب زده می شوند به غیر از مشتق زمان که باید بر حسب تفاضل پسرو تقریب زده شود:

$$\frac{P_2^{t+\Delta t} - 3P_1^{t+\Delta t} + 2P_L}{\frac{3}{4}\Delta x^2} = \left(\frac{\phi\mu c}{k} \right) \frac{P_i^{t+\Delta t} - P_i^t}{\Delta t} \quad (i = 1)$$

$$\frac{P_{i+1}^{t+\Delta t} - 2P_i^{t+\Delta t} + P_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x^2} = \left(\frac{\phi\mu c}{k} \right) \frac{P_i^{t+\Delta t} - P_i^t}{\Delta t} \quad (i = 2, \dots, N-1)$$

$$\frac{2P_R^{t+\Delta t} - 3P_N^{t+\Delta t} + P_{N-1}^{t+\Delta t}}{\frac{3}{4}\Delta x^2} = \left(\frac{\phi\mu c}{k} \right) \frac{P_i^{t+\Delta t} - P_i^t}{\Delta t} \quad (i = N)$$

در این مورد، ما N معادله با N مجهول (N تعداد بلوک ها است) داریم که باید همزمان حل شوند. به منظور سادگی معادلات به شکل زیر نوشته می شوند:

$$a_i P_{i-1}^{t+\Delta t} + b_i P_i^{t+\Delta t} + c_i P_{i+1}^{t+\Delta t} = d_i, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\alpha = \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \left(\frac{\Delta x^2}{\Delta t} \right)$$

$$a_1 = 0$$

$$a_i = 1, \quad i = 2, \dots, N$$

$$b_1 = b_N = -3 - \frac{3}{4}\alpha$$

$$b_i = -2 - \alpha, \quad i = 2, \dots, N-1$$

$$c_N = 0$$

$$c_i = 1, \quad i = 1, \dots, N-1$$

$$d_1 = -\frac{3}{4}\alpha P_1^t - 2P_L$$

$$d_i = -\frac{3}{4}\alpha P_i^t, \quad i = 2, \dots, N-1$$

$$d_N = -\frac{3}{4}\alpha P_N^t - 2P_R$$

دستگاه معادله خطی فوق را می توان برای فشار متوسط هر بلوک با روش حذفی گوس حل کرد.

فرمولاسیون Crank-Nicholson

همانطور که بیان شد، امکان نوشتن معادلات برای زمانی بین t و Δt وجود دارد. برای $t + \Delta t / 2$ معادله تفاضل برای بلوک i به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{P_{i+1}^{t+\frac{\Delta t}{2}} - 2P_i^{t+\frac{\Delta t}{2}} + P_{i-1}^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta x^2} = \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \frac{P_i^{t+\frac{\Delta t}{2}} - P_i^t}{\Delta t}$$

با توجه به اینکه فشارها در t و Δt تعریف شده اند، معادله بالا را نمی توانیم در شکلی که هست حل کنیم. لذا طرف چپ را به طور متوسط روش صریح و ضمنی در نظر می گیریم:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{P_{i+1}^t - 2P_i^t + P_{i-1}^t}{\Delta x^2} + \frac{P_{i+1}^{t+\Delta t} - 2P_i^{t+\Delta t} + P_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x^2} \right] = \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \frac{P_i^{t+\Delta t} - P_i^t}{\Delta t}$$

دستگاه معادله خطی حاصله به طور همزمان مانند روش ضمنی حل می شود.

بحث در روش‌های فرمولاسیون

به طور بدیهی استفاده از روش صریح ساده‌تر از روش ضمنی است. چه آنکه عبارت صریحی برای بدست آوردن مستقیم فشار بدست می‌آید. مرتبه خطای گسسته‌سازی برای هر دو روش یکی است. حال آنکه مقدار عملیات ریاضی مورد نظر برای روش صریح کمتر است. اگر چه برای حالت یک بعدی این مطلب ممکن است چندان مهم نباشد، اما برای موردهای 2D و 3D با افزایش تعداد بلوک‌ها، زمان محاسباتی برای هر گام زمانی برای دو روش بسیار متفاوت است. در هر صورت روش صریح به ندرت استفاده می‌شود. این روش برای گام‌های زمانی بزرگ ناپایدار است.

با استفاده از روش آنالیز پایداری von Neumann نشان داده می‌شود که روش صریح برای پایداری نیاز به شرط زیر دارد:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \Delta x^2$$

این شرط نشان می‌دهد که گام زمانی Δt بوسیله خواص سیال - سنگ و اندازه بلوک شبکه محدود می‌شود. این محدودیت با کوچکترین مقدار Δt برای یک بلوک خاص شدیدتر می‌شود. (یعنی آنکه Δt برای هر بلوک با توجه به رابطه فوق مقدار خاصی است و در این میان برای پایداری حل، Δt باید برابر با کوچکترین مقدار انتخاب شود.)

کاربرد روش آنالیز پایداری von Neumann نشان می‌دهد که روش ضمنی برای همه گام‌های زمانی بدون شرط پایدار است. در روش ضمنی، عملیات محاسباتی بیشتر برای هر گام زمانی مورد نیاز است که به طور معمول با افزایش Δt این مسئله را می‌توان تا حدی جبران کرد. البته Δt بزرگتر، منجر به خطای محاسباتی بیشتر هم می‌شود. بنابراین در هر حل عددی، باید بررسی شود که میزان خطای محاسباتی در حد قابل قبولی باشد.

آنالیز پایداری

آنالیز پایداری برای روش صریح

معادله تفاضل صریح به صورت زیر هم نوشته می شود:

$$\frac{P(x + \Delta x, t) - 2P(x, t) + P(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} = \alpha \frac{P(x, t + \Delta t) - P(x, t)}{\Delta t}$$

که

$$\alpha = \frac{\phi \mu c}{k}$$

در روش آنالیز پایداری von Neumann، فرض می شود که اگر $P(x, t)$ جوابی از معادله فوق باشد آنگاه $P(x, t) + \varepsilon(x, t)$ ، به عنوان اغتشاش در تابع فشار، نیز جوابی از معادله است. بنابراین، رابطه فوق به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\frac{\varepsilon(x + \Delta x, t) - 2\varepsilon(x, t) + \varepsilon(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} = \alpha \frac{\varepsilon(x, t + \Delta t) - \varepsilon(x, t)}{\Delta t}$$

فرض می شود که این تابع خطا به صورت $\varepsilon(x, t) = \psi(x, t) e^{i\beta x}$ باشد که در آن $i = \sqrt{-1}$.
بنابراین:

$$\varepsilon(x + \Delta x, t) = \psi(t) e^{i\beta(x + \Delta x)}$$

$$\varepsilon(x - \Delta x, t) = \psi(t) e^{i\beta(x - \Delta x)}$$

$$\varepsilon(x, t + \Delta t) = \psi(t + \Delta t) e^{i\beta x}$$

فرض می شود که این تابع خطا به صورت $\varepsilon(x, t) = \psi(x, t) e^{i\beta x}$ باشد که در آن $i = \sqrt{-1}$.
بنابراین:

$$\varepsilon(x + \Delta x, t) = \psi(t) e^{i\beta(x + \Delta x)}$$

$$\varepsilon(x - \Delta x, t) = \psi(t) e^{i\beta(x - \Delta x)}$$

$$\varepsilon(x, t + \Delta t) = \psi(t + \Delta t) e^{i\beta x}$$

با جاگذاری و ساده سازی و استفاده از تساوی زیر

$$e^{i\beta\Delta x} + e^{-i\beta\Delta x} - 2 = -4 \sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)$$

عبارت زیر به دست می آید:

$$\frac{\psi(t + \Delta t)}{\psi(t)} = \left[1 - \frac{4\Delta t}{\alpha\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right) \right]$$

می‌توان نسبت $\psi(t + \Delta t)/\psi(t)$ را به عنوان نسبت افزایش خطا در افزایش زمان به اندازه Δt ، تفسیر کرد. آشکارا، اگر این نسبت از یک بزرگتر باشد حل ناپایدار است. پس، عبارت زیر به عنوان معیار پایداری در نظر گرفته می‌شود:

$$\left| \frac{\psi(t + \Delta t)}{\psi(t)} \right| \leq 1$$

یا

$$\left| 1 - \frac{4\Delta t}{\alpha \Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{\beta \Delta x}{2} \right) \right| \leq 1$$

به دلیل آنکه

$$1 \geq \sin^2 \left(\frac{\beta \Delta x}{2} \right) \geq 0$$

شرط پایداری به قرار زیر می‌شود:

$$\frac{4\Delta t}{\alpha \Delta x^2} - 1 \leq 1$$

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi \mu c}{k} \right) \Delta x^2$$

با

آنالیز پایداری برای روش ضمنی

شکل ضمنی معادله تفاسیل به گونه زیر است:

$$\frac{P(x + \Delta x, t) - 2P(x, t) + P(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} = \alpha \frac{P(x, t + \Delta t) - P(x, t)}{\Delta t}$$

به مثابه روش فوق، معادله زیر برای جمله خطا به دست می آید:

$$\frac{\varepsilon(x + \Delta x, t) - 2\varepsilon(x, t) + \varepsilon(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} = \alpha \frac{\varepsilon(x, t + \Delta t) - \varepsilon(x, t)}{\Delta t}$$

بار دیگر با فرض $\varepsilon(x, t) = \psi(x, t)e^{i\beta x}$ ، عبارت زیر برای نسبت خطا به دست می آید:

$$\frac{\psi(t + \Delta t)}{\psi(t)} = \frac{1}{1 + \frac{4\Delta t}{\alpha \Delta x^2} \sin^2\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right)}$$

با توجه به معیار پایداری، شرط پایداری به شکل زیر تبدیل می شود:

$$1 + \frac{4\Delta t}{\alpha \Delta x^2} \sin^2\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right) \geq 1$$

که همیشه درست است. در نهایت، شرط پایداری به شکل زیر ساده می شود:

$$\Delta t \leq \infty$$

آنالیز پایداری برای روش Crank – Nicholson

کاربرد روش آنالیز پایداری von Neumann نشان می دهد که روش Crank-Nicholson برای همه گام های زمانی،

مانند روش ضمنی بدون شرط پایدار است.

End