

بسمه تعالی

مدلسازی و شبیه سازی مخازن

۵۲ / ۱

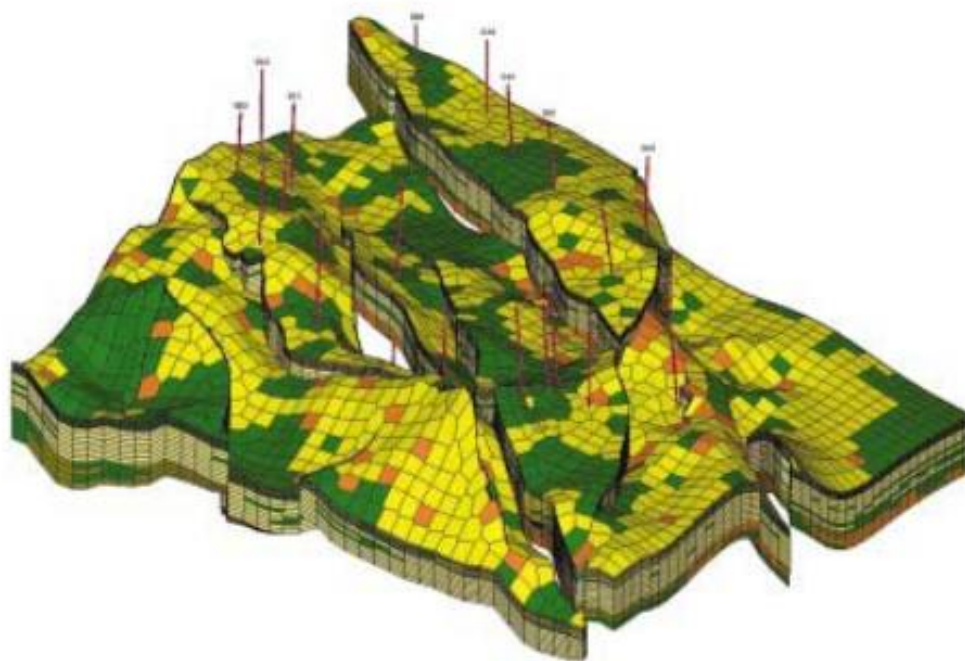
دانشگاه سمnan

دانشکده مهندسی نفت

۱۳۹۸

جلسه دوم مجازی

دانشکده مهندسی شیمی و نفت
دانشگاه صنعتی شریف



شبیه‌سازی مدرن مخازن نفتی (۲۶۸۳۲)

TPG4160 RESERVOIR SIMULATION

SPRING SEMESTER 2018

Course content

The course gives the theoretical basis for numerical simulation of fluid flow in petroleum reservoirs. The partial differential equations required for single-phase and multi-phase fluid flow in porous media are developed, as well as numerical methods for solving the equation using finite difference methods. Input data requirements and applications of simulation models for history matching and prediction of field performance will be discussed.

Teachers

Professor Jon Kleppe jon.kleppe@ntnu.no

Assoc. Professor Carl Fredrik Berg carl.f.berg@ntnu.no

Web-pages

Blackboard (internal only)

<http://www.petroleum.ntnu.no/~kleppe/TPG4160> (external)

معادله دیفرانسیل جزئی (PDE)

معادله حرکت سیال یک فازي، یک بعدی، افقی، در محیط متخلخل همگن (homogenous) همسانگرد (isotropic) و هم دما به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \frac{\partial P}{\partial t} \quad (1)$$

$$@t \leq 0 \quad or \quad t = 0; \quad \forall x : \quad P = P_0 = P_R \quad \text{شرایط اولیه (Initial Condition):}$$

$$\begin{cases} @x = 0 \quad (\forall t > 0); P = P_L \\ @x = L \quad (\forall t > 0); P = P_R \end{cases} \quad \text{شرایط مرزی (Boundary Conditions):}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \frac{\partial P}{\partial t}$$



$$\left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_i^t = \frac{P_i^{t+\Delta t} - P_i^t}{(\Delta t)} + O(\Delta t)$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_i^t = \frac{P_{i+1}^t - 2P_i^t + P_{i-1}^t}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2$$

معادله تفاضل صریح (Explicit)

با در نظر گرفتن زمان t و تقریب‌های تفاضل محدود فوق و جایگزینی آنها در معادله خطی جریان عبارت زیر، معادله تفاضل، به دست می‌آید:

$$\frac{P_{i+1}^t - 2P_i^t + P_{i-1}^t}{(\Delta x)^2} \approx \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \frac{P_i^{t+\Delta t} - P_i^t}{(\Delta t)}, \quad i = 1, \dots, N \quad (32)$$

برای راحتی جمله خطا از معادله بالا حذف شده‌است. همچنین رابطه تساوی با رابطه تقریب جایگزین شده‌است. باید توجه داشت که خطای وارد شده در حل عددی معادله جریان متناسب با Δt و Δx^2 است (به ترتیب).

شرایط مرزی (BC's)

نیروی رانش برای جریان از BC's حاصل می شود. اساساً دو نوع BC's وجود دارد. شرط فشار (شرط دیریلکه) و شرط دبی جریان (شرط نیومن).

$$\begin{cases} @x = 0 \ (\forall t > 0); P = P_L \\ @x = L \ (\forall t > 0); P = P_R \end{cases}$$

نکته ۹: از دیدگاه ریاضی (حل معادلات پاره‌ای) با ۸ نوع ترکیبی شرای مرزی سروکار خواهیم داشت، ولی در اینجا محض سهولت به دو شرط اساسی آن می پردازیم.

شرط فشار:

وقتی فشار در مرزها معلوم شده باشد، در معادلات، فشار در دو طرف سیستم مشخص می‌شود. برای سیستم خطی توصیف شده، داریم:

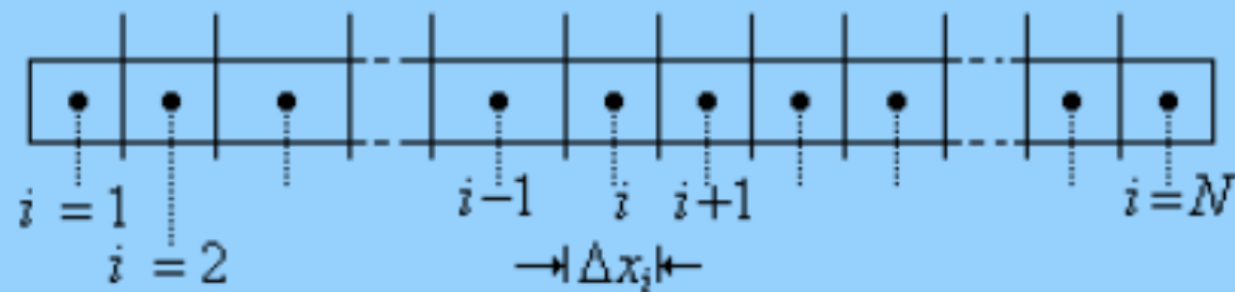
$$P(x = 0, t > 0) = P_L$$

$$P(x = L, t > 0) = P_R$$

روش Block-Centered

تعداد بلوکها و ایندکسها: N

گستره ایندکس: $i = 1, 2, 3, \dots, N$



شرط فشار:

وقتی فشار در مرزها معلوم شده باشد، در معادلات، فشار در دو طرف سیستم مشخص می‌شود. برای سیستم خطی توصیف شده، داریم:

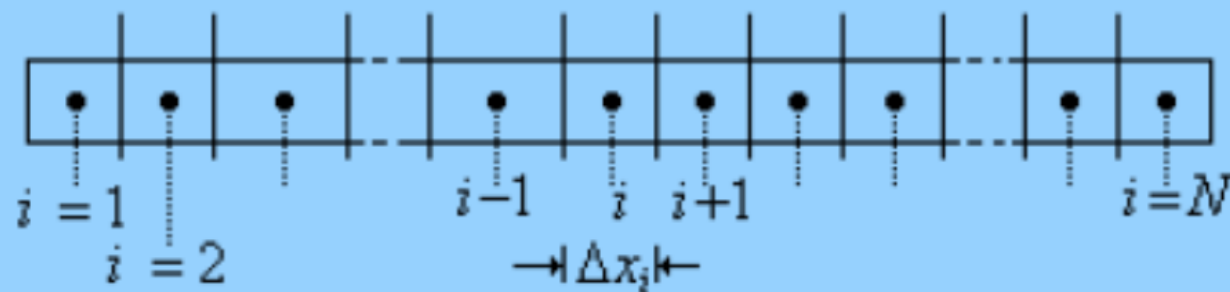
$$P(x = 0, t > 0) = P_L$$

$$P(x = L, t > 0) = P_R$$

روش Block-Centered

تعداد بلوکها و ایندکسها: N

گستره ایندکس: $i = 1, 2, 3, \dots, N$



و با استفاده از سیستم اندیس گذاری:

$$P_{i=1/2}^{t>0} = P_L$$

$$P_{i=N+1/2}^{t>0} = P_R$$

شرط فشار:

وقتی فشار در مرزها معلوم شده باشد، در معادلات، فشار در دو طرف سیستم مشخص می‌شود. برای سیستم خطی توصیف شده، داریم:

$$P(x = 0, t > 0) = P_L$$

$$P(x = L, t > 0) = P_R$$

و با استفاده از سیستم اندیس گذاری:

$$P_{i=1/2}^{t>0} = P_L$$

$$P_{i=N+1/2}^{t>0} = P_R$$

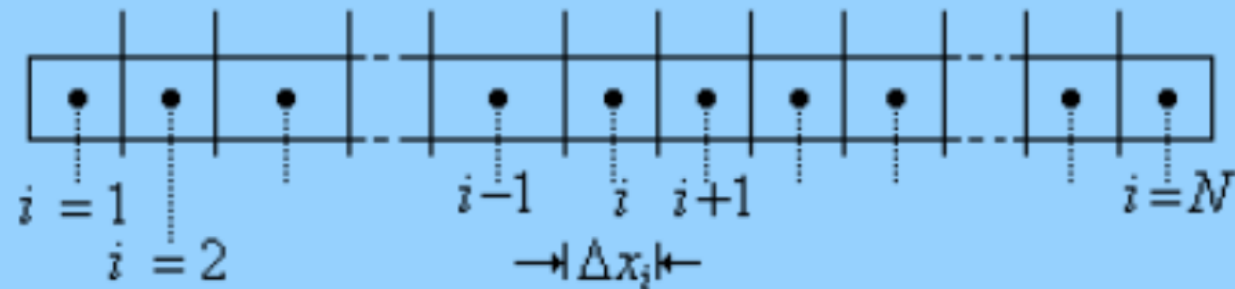
علت استفاده از $i = 1/2$ و $i = N + 1/2$ آن است که BC's به دو طرف انتهایی سیستم اعمال می‌شود. (اولی در طرف چپ بلوک اول $i = 1/2$ و دومی در طرف راست بلوک آخر $i = N + 1/2$). بنابراین BC's به طور مستقیم نمی‌توانند در معادله تفاضل جایگذاری شوند. البته با استفاده از سری تیلور می‌توان برای بلوک 1 و N معادلات جدیدی به دست آورد:

علت استفاده از $i = 1/2$ و $i = N + 1/2$ آن است که BC's به دو طرف انتهایی سیستم اعمال می شود. (اولی در طرف چپ بلوک اول $i = 1/2$ و دومی در طرف راست بلوک آخر $i = N + 1/2$). بنابراین BC's به طور مستقیم نمی توانند در معادله تفاضل جایگذاری شوند. البته با استفاده از سری تیلور می توان برای بلوک 1 و N معادلات جدیدی به دست آورد:

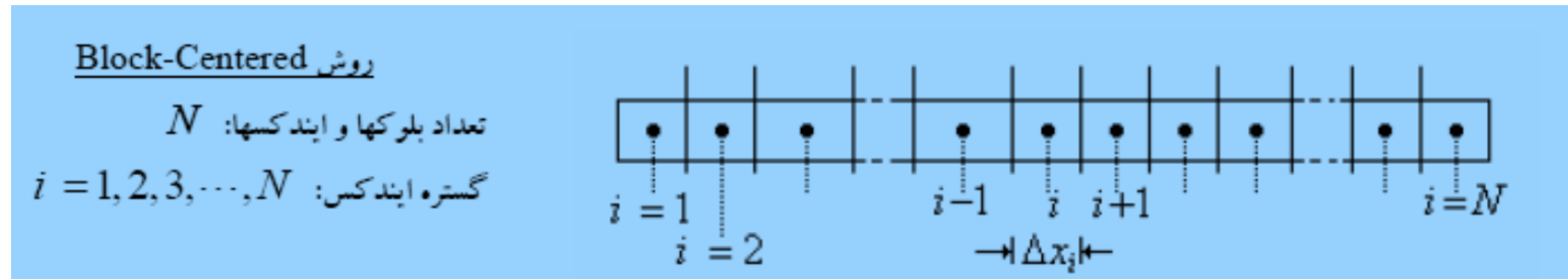
روش Block-Centered

تعداد بلوکها و ایندکسها: N

گستره ایندکس: $i = 1, 2, 3, \dots, N$



علت استفاده از $i = 1/2$ و $i = N + 1/2$ آن است که BC's به دو طرف انتهایی سیستم اعمال می شود. (اولی در طرف چپ بلوک اول $i = 1/2$ و دومی در طرف راست بلوک آخر $i = N + 1/2$). بنابراین BC's به طور مستقیم نمی توانند در معادله تفاضل جایگذاری شوند. البته با استفاده از سری تیلور می توان برای بلوک 1 و N معادلات جدیدی به دست آورد:



$$P(x_2, t) = P(x_1, t) + \frac{\Delta x}{1!} P'(x_1, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} P''(x_1, t) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} P'''(x_1, t) + \dots$$

$$P(x = 0, t) = P(x_1, t) + \frac{(-\Delta x / 2)}{1!} P'(x_1, t) + \frac{(-\Delta x / 2)^2}{2!} P''(x_1, t) + \frac{(-\Delta x / 2)^3}{3!} P'''(x_1, t) + \dots$$

$$P(x_2, t) = P(x_1, t) + \frac{\Delta x}{1!} P'(x_1, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} P''(x_1, t) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} P'''(x_1, t) + \dots$$

$$P(x=0, t) = P(x_1, t) + \frac{(-\Delta x/2)}{1!} P'(x_1, t) + \frac{(-\Delta x/2)^2}{2!} P''(x_1, t) + \frac{(-\Delta x/2)^3}{3!} P'''(x_1, t) + \dots$$

که با ترکیب دو عبارت، تقریب مشتق مرتبه دوم در بلوک یک بدست می آید:

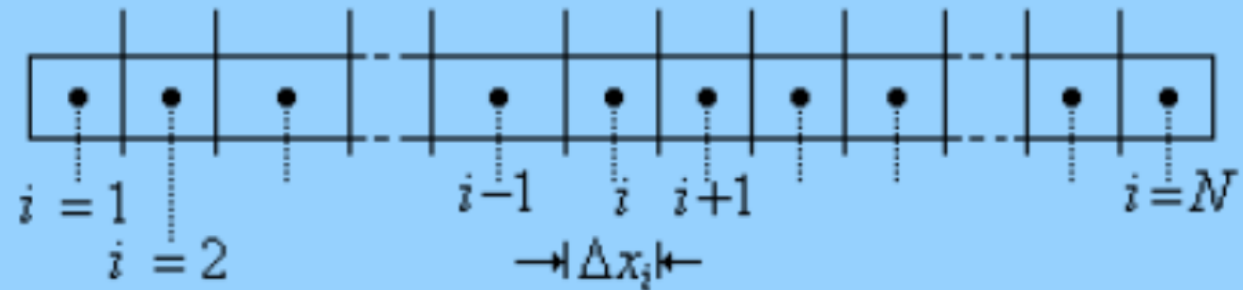
$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_1^t = \frac{P_2^t - 3P_1^t + 2P_L}{\frac{3}{4}(\Delta x)^2} + O(\Delta x)$$

یک عیب این روش آن است که جمله خطا برای این نوع فرمولاسیون از مرتبه یک یعنی متناسب با Δx است. با

روش Block-Centered

تعداد بلوکها و ایندکسها: N

گستره ایندکس: $i = 1, 2, 3, \dots, N$



$$P(x_2, t) = P(x_1, t) + \frac{\Delta x}{1!} P'(x_1, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} P''(x_1, t) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} P'''(x_1, t) + \dots$$

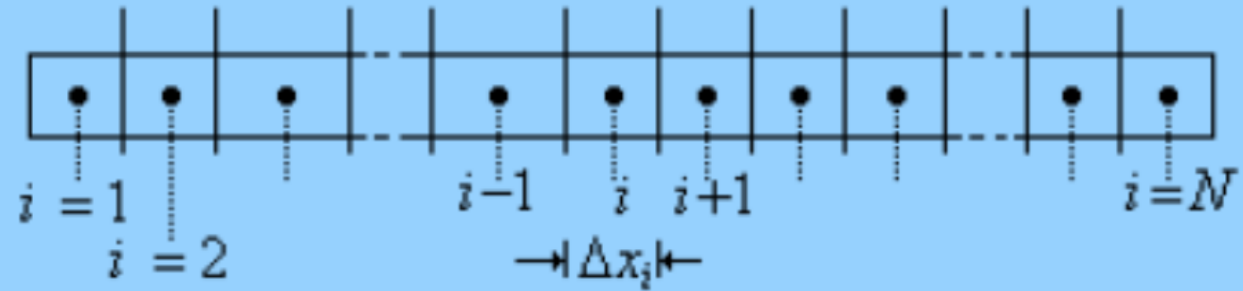
$$P(x=0, t) = P(x_1, t) + \frac{(-\Delta x/2)}{1!} P'(x_1, t) + \frac{(-\Delta x/2)^2}{2!} P''(x_1, t) + \frac{(-\Delta x/2)^3}{3!} P'''(x_1, t) + \dots$$

که با ترکیب دو عبارت، تقریب مشتق مرتبه دوم در بلوک یک بدست می آید:

روش Block-Centered

تعداد بلوکها و ایندکسها: N

گستره ایندکس: $i = 1, 2, 3, \dots, N$



روشی مشابه برای بلوک N داریم:

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_N^t = \frac{2P_R - 3P_N^t + P_{N-1}^t}{\frac{3}{4}(\Delta x)^2} + O(\Delta x)$$

در مورد مخازن واقعی، شرایط مرزی فشار، در مورد فشار ته چاه P_{bh} یا فشار سر چاه P_{wh} برای چاههای تولید یا

تزریق استفاده می شود.

شرط مرزی دبی جریان:

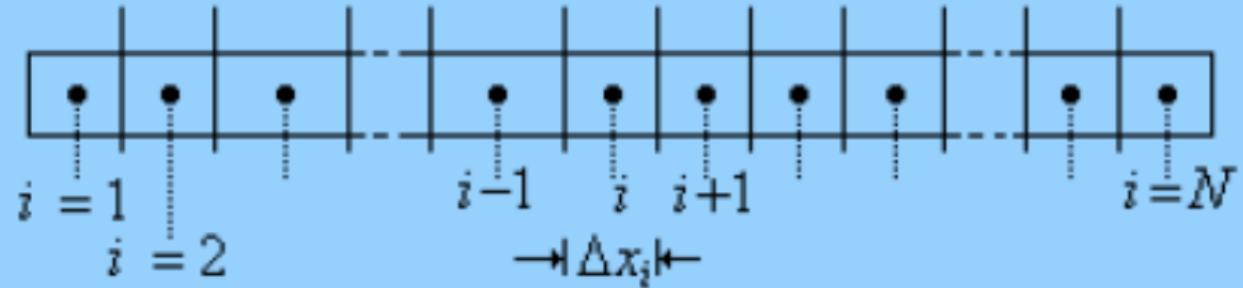
متقابلاً، دبی جریان به سمت داخل یا خارج کناره‌های سیستم، می‌تواند معین شود. برای مثال دبی که از طرف چپ سیستم وارد می‌شود Q_L . با توجه به آنکه دبی می‌تواند با قانون دارسی محاسبه شود، داریم:

$$Q_L = -\frac{kA}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{x=0}$$

روش Block-Centered

تعداد بلوک‌ها و ایندکسها: N

گستره ایندکس: $i = 1, 2, 3, \dots, N$



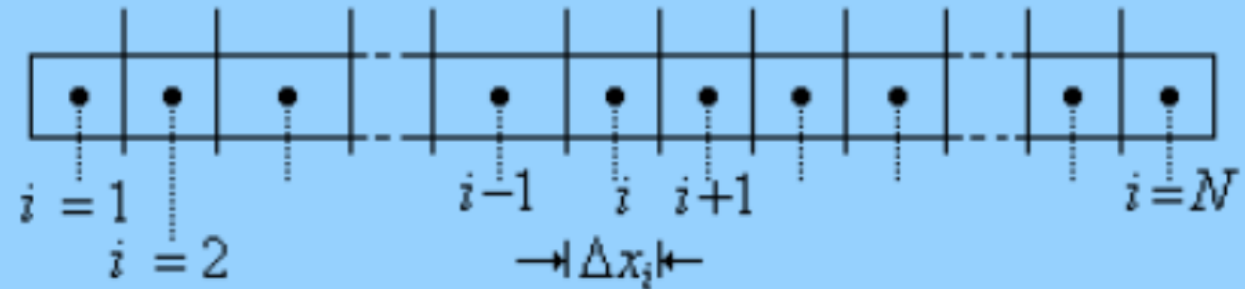
شرط مرزی دبی جریان:

متقابلاً، دبی جریان به سمت داخل یا خارج کناره‌های سیستم، می‌تواند معین شود. برای مثال دبی که از طرف چپ سیستم وارد می‌شود Q_L . با توجه به آنکه دبی می‌تواند با قانون دارسی محاسبه شود، داریم:

$$Q_L = -\frac{kA}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{x=0}$$

روش Block-Centered

تعداد بلوک‌ها و ایندکسها: N
گستره ایندکس: $i = 1, 2, 3, \dots, N$



با استفاده از سری تیلور برای بلوک یک، و بسط مشتق فشار به عنوان تابع داریم:

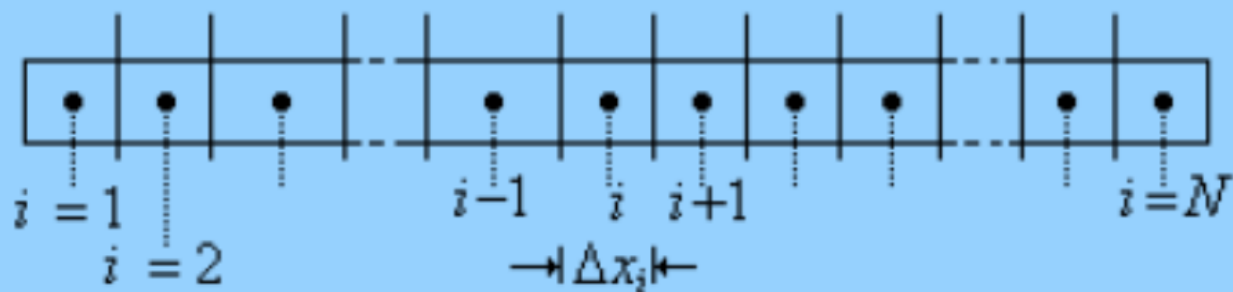
$$P'(x_1 + \Delta x / 2, t) = P'(x_1, t) + \frac{(\Delta x / 2)}{1!} P''(x_1, t) + \frac{(\Delta x / 2)^2}{2!} P'''(x_1, t) + \dots$$

$$P'(x = 0, t) = P'(x_1, t) + \frac{(-\Delta x / 2)}{1!} P''(x_1, t) + \frac{(-\Delta x / 2)^2}{2!} P'''(x_1, t) + \dots$$

روش Block-Centered

تعداد بلوکها و ایندکسها: N

گستره ایندکس: $i = 1, 2, 3, \dots, N$



با استفاده از سری تیلور برای بلوک یک، و بسط مشتق فشار به عنوان تابع داریم:

$$P'(x_1 + \Delta x / 2, t) = P'(x_1, t) + \frac{(\Delta x / 2)}{1!} P''(x_1, t) + \frac{(\Delta x / 2)^2}{2!} P'''(x_1, t) + \dots$$

$$P'(x = 0, t) = P'(x_1, t) + \frac{(-\Delta x / 2)}{1!} P''(x_1, t) + \frac{(-\Delta x / 2)^2}{2!} P'''(x_1, t) + \dots$$

با تفریق عبارت دوم از اول و حل آن برای مشتق مرتبه دوم، عبارت زیر برای بلوک ۱ به دست می آید:

$$P''(x_1, t) = \frac{P'(x_1 + \Delta x / 2, t) - P'(x = 0, t)}{\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

$$P''(x_1, t) = \frac{P'(x_1 + \Delta x / 2, t) - P'(x = 0, t)}{\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

حال با جایگزینی مشتق در $x = 0$ با شرط مرزی داریم:

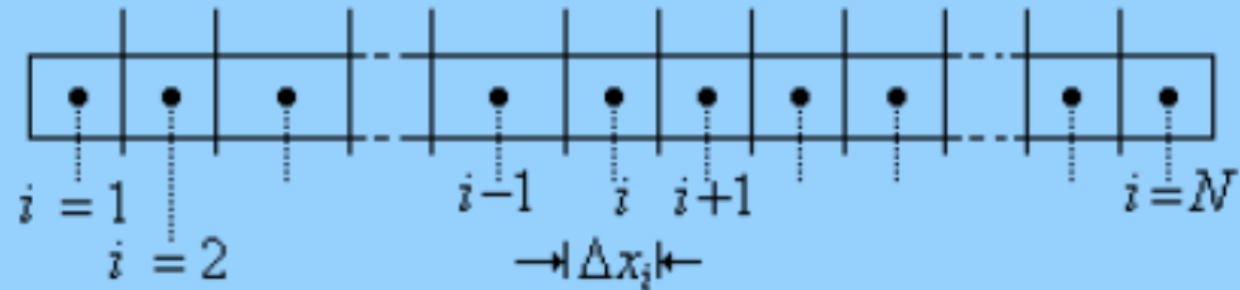
$$Q_L = -\frac{kA}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{x=0}$$

$$P''(x_1, t) = \frac{P'(x_1 + \Delta x / 2, t) - Q_L \frac{\mu}{kA}}{\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

روش Block-Centered

تعداد بلوکها و ایندکسها: N

گستره ایندکس: $i = 1, 2, 3, \dots, N$



$$P''(x_1, t) = \frac{P'(x_1 + \Delta x / 2, t) - Q_L \frac{\mu}{kA}}{\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

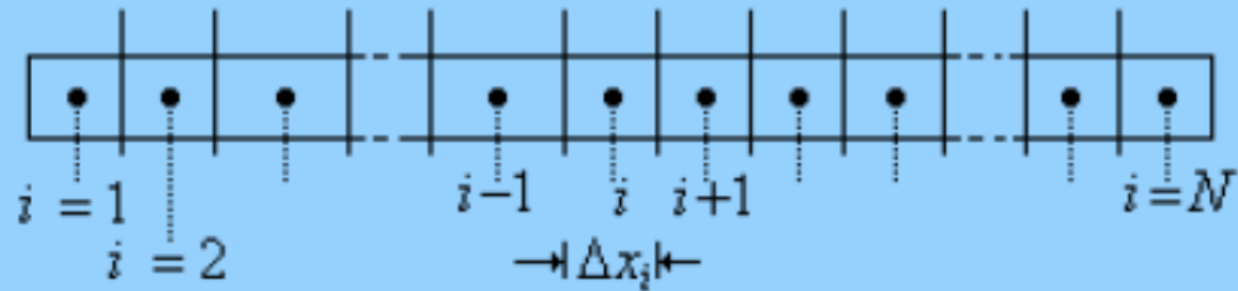
مشتق دیگر در عبارت فوق را می توان با تقریب مرکزی جایگزین کرد:

$$P'(x_1 + \Delta x / 2, t) = \frac{P(x_2, t) - P(x_1, t)}{\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

روش Block-Centered

تعداد بلوکها و ایندکسها: N

گستره ایندکس: $i = 1, 2, 3, \dots, N$



بنابراین شکل نهایی مشتق مرتبه دوم برای بلوک اول با شرط مرزی فوق به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_1^t = \frac{P_2^t - P_1^t}{\Delta x^2} + Q_L \frac{\mu}{kA \Delta x} + O(\Delta x)$$

مشابه آن، برای دبی ثابت در طرف راست سیستم، Q_R ، داریم:

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_N^t = \frac{P_N^t - P_{N-1}^t}{\Delta x^2} - Q_R \frac{\mu}{kA \Delta x} + O(\Delta x)$$

در یک مخزن واقعی، شرط دبی جریان، بیان کننده دبی تولید یا تزریق برای چاهها است. یک مورد ویژه برای مرزهای بدون جریان (No flow boundary) است ($Q = 0$). این شرط در مرزهای با لایه‌های نفوذناپذیر و گسلها، در مخزن می‌تواند دیده شود.

معادله دیفرانسیل جزئی (PDE)

معادله حرکت سیال یک فازی، یک بعدی، افقی، در محیط متخلخل همگن (homogenous) همسانگرد (isotropic) و هم‌دما به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \frac{\partial P}{\partial t} \quad (1)$$

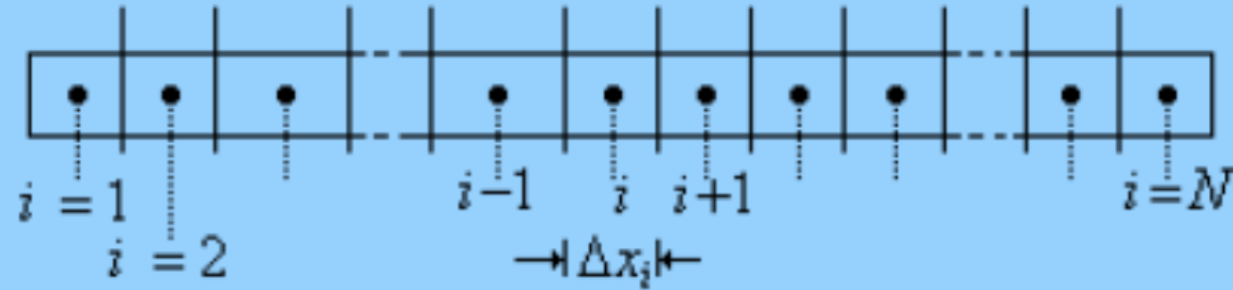
شرایط اولیه (Initial Condition): $@t \leq 0 \text{ or } t = 0; \quad \forall x : P = P_0 = P_R$

معادله دیفرانسیل جزئی (PDE)

روش Block-Centered

تعداد بلوکها و ایندکسها: N

گستره ایندکس: $i = 1, 2, 3, \dots, N$



شرایط اولیه (Initial Condition):

$$@t \leq 0 \text{ or } t = 0; \quad \forall x : P = P_0 = P_R$$

شرط اولیه (IC):

شرط اولیه (فشار اولیه) برای سیستم افقی در طول سیستم، به صورت زیر معلوم می شود:

$$P_i^{t=0} = P_0 \quad i = 1, \dots, N$$

برای سیستم های غیرافقی، فشار هیدرواستاتیکی به عنوان فشار اولیه برای هر بلوک با توجه به سطح مبنا و چگالی سیالات محاسبه می شود.

حل معادله تفاضل:

با بدست آوردن معادله تفاضل و داشتن BC's و IC می توانیم آن را برای فشار حل کنیم. البته مطلب مهم زیر باید مورد توجه قرار گیرد. برای بدست آوردن تقریب تفاضل، از زمان t در سری تیلور استفاده شد. بدیهی است می توانستیم از زمان $t + \Delta t$ با همان عمومیت معادله، هم استفاده کنیم یا حتی از $t + \Delta t / 2$. موارد اشاره شده، بحث خواهند شد. ابتدا از فرمولاسیون صریح استفاده می کنیم. برای راحتی جمله های خطا را حذف می کنیم.

فرمولاسیون صریح (Explicit)

معادله اشاره شده در صفحات قبل به این گونه است. به وسیله تقریب همه جملات در زمان t ، ما می‌توانیم فشار متوسط هر بلوک را به طور صریح با حل معادلات تفاضل بدست آوریم. (در عبارت زیر شرایط مرزی به صورت فشار ثابت در مرزها در نظر گرفته شده‌اند. اگر شرایط برای دبی ثابت باشد، معادلات باید بر طبق آن اصلاح شوند).

$$\frac{P_{i+1}^t - 2P_i^t + P_{i-1}^t}{(\Delta x)^2} \approx \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \frac{P_i^{t+\Delta t} - P_i^t}{(\Delta t)}, \quad i = 1, \dots, N \quad (32)$$

فرمولاسیون صریح (Explicit)

معادله اشاره شده در صفحات قبل به این گونه است. به وسیله تقریب همه جملات در زمان t ، ما می‌توانیم فشار متوسط هر بلوک را به طور صریح با حل معادلات تفاضل بدست آوریم. (در عبارت زیر شرایط مرزی به صورت فشار ثابت در مرزها در نظر گرفته شده‌اند. اگر شرایط برای دبی ثابت باشد، معادلات باید بر طبق آن اصلاح شوند).

$$\frac{P_{i+1}^t - 2P_i^t + P_{i-1}^t}{(\Delta x)^2} \approx \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \frac{P_i^{t+\Delta t} - P_i^t}{(\Delta t)}, \quad i = 1, \dots, N \quad (32)$$

$$P_i^{t+\Delta t} = P_i^t + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) \left(\frac{k}{\phi \mu c} \right) (P_{i+1}^t - 2P_i^t + P_{i-1}^t) \quad i = 2, \dots, N - 1$$

فرمولاسیون صریح (Explicit)

معادله اشاره شده در صفحات قبل به این گونه است. به وسیله تقریب همه جملات در زمان t ، ما می‌توانیم فشار متوسط هر بلوک را به طور صریح با حل معادلات تفاضل بدست آوریم. (در عبارت زیر شرایط مرزی به صورت فشار ثابت در مرزها در نظر گرفته شده‌اند. اگر شرایط برای دبی ثابت باشد، معادلات باید بر طبق آن اصلاح شوند).

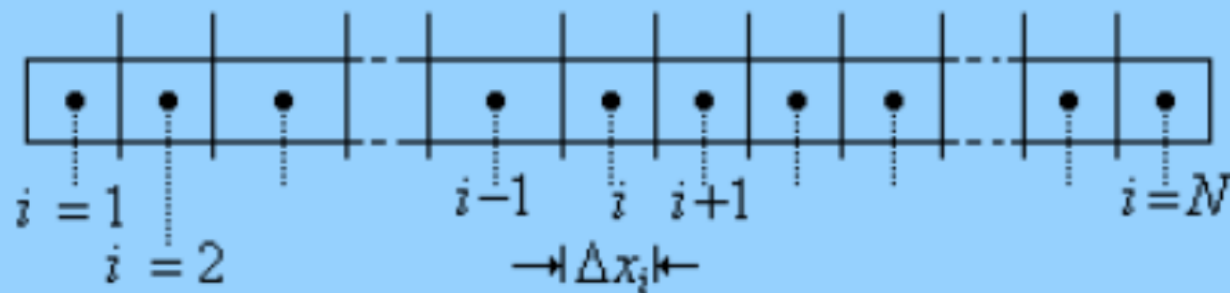
$$\frac{P_{i+1}^t - 2P_i^t + P_{i-1}^t}{(\Delta x)^2} \approx \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \frac{P_i^{t+\Delta t} - P_i^t}{(\Delta t)}, \quad i = 1, \dots, N \quad (32)$$

$$P_i^{t+\Delta t} = P_i^t + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) \left(\frac{k}{\phi \mu c} \right) (P_{i+1}^t - 2P_i^t + P_{i-1}^t) \quad i = 2, \dots, N-1$$

روش Block-Centered

تعداد بلوکها و ایندکسها: N

گستره ایندکس: $i = 1, 2, 3, \dots, N$



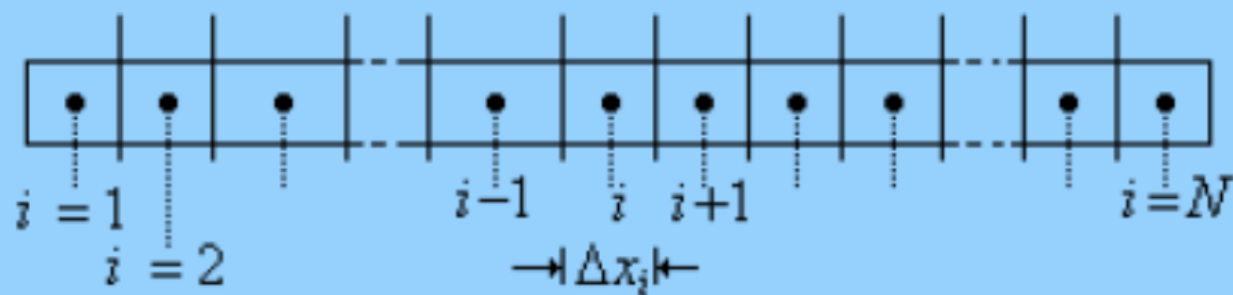
$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_1^t = \frac{P_2^t - 3P_1^t + 2P_L}{\frac{3}{4}(\Delta x)^2} + O(\Delta x)$$

$$P_i^{t+\Delta t} = P_i^t + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) \left(\frac{k}{\phi \mu c}\right) (P_{i+1}^t - 2P_i^t + P_{i-1}^t) \quad i = 2, \dots, N-1$$

روش Block-Centered

تعداد بلوکها و ایندکسها: N

گستره ایندکس: $i = 1, 2, 3, \dots, N$



$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_1^t = \frac{P_2^t - 3P_1^t + 2P_L}{\frac{3}{4}(\Delta x)^2} + O(\Delta x)$$

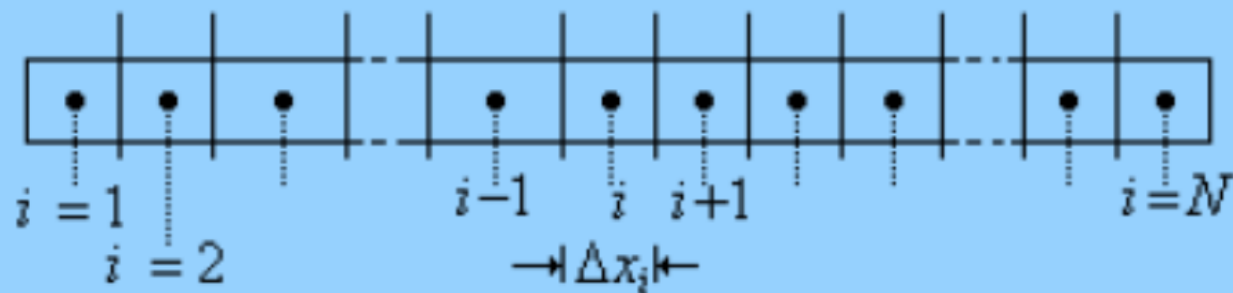
$$P_1^{t+\Delta t} = P_1^t + \frac{4}{3} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) \left(\frac{k}{\phi \mu c} \right) (P_2^t - 3P_1^t + 2P_L)$$

$$P_i^{t+\Delta t} = P_i^t + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) \left(\frac{k}{\phi \mu c} \right) (P_{i+1}^t - 2P_i^t + P_{i-1}^t) \quad i = 2, \dots, N-1$$

روش بلوک-مرکز Block-Centered

تعداد بلوکها و ایندکسها: N

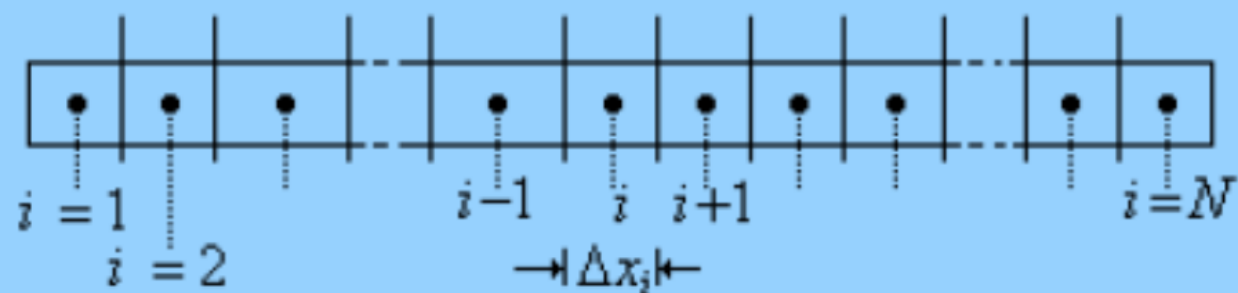
گستره ایندکس: $i = 1, 2, 3, \dots, N$



روش Block-Centered

تعداد بلوکها و ایندکسها: N

گستره ایندکس: $i = 1, 2, 3, \dots, N$



$$P_1^{t+\Delta t} = P_1^t + \frac{4}{3} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) \left(\frac{k}{\phi \mu c} \right) (P_2^t - 3P_1^t + 2P_L)$$

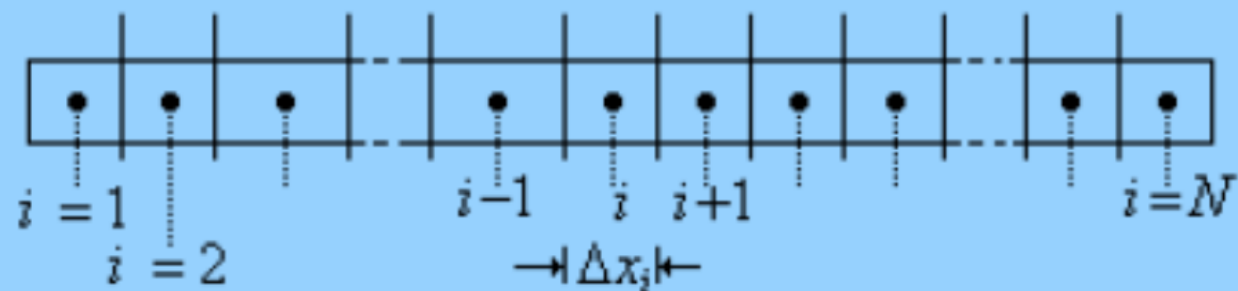
$$P_i^{t+\Delta t} = P_i^t + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) \left(\frac{k}{\phi \mu c} \right) (P_{i+1}^t - 2P_i^t + P_{i-1}^t) \quad i = 2, \dots, N-1$$

$$P_N^{t+\Delta t} = P_N^t + \frac{4}{3} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) \left(\frac{k}{\phi \mu c} \right) (2P_R^t - 3P_N^t + P_{N-1}^t)$$

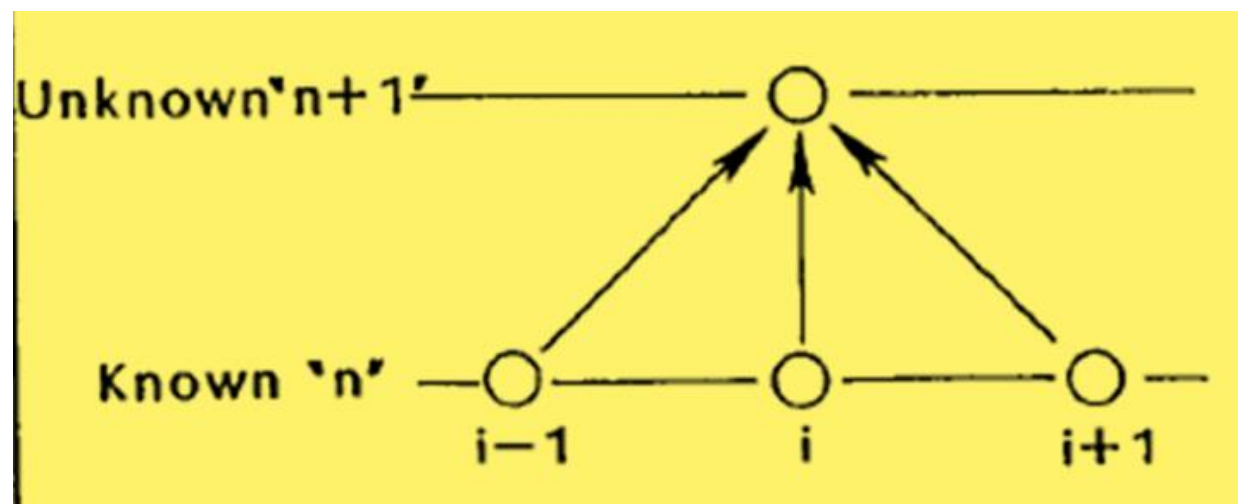
روش Block-Centered

تعداد بلوکها و ایندکسها: N

گستره ایندکس: $i = 1, 2, 3, \dots, N$



$$P_i^{t+\Delta t} = P_i^t + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) \left(\frac{k}{\phi \mu c} \right) (P_{i+1}^t - 2P_i^t + P_{i-1}^t) \quad i = 2, \dots, N-1$$



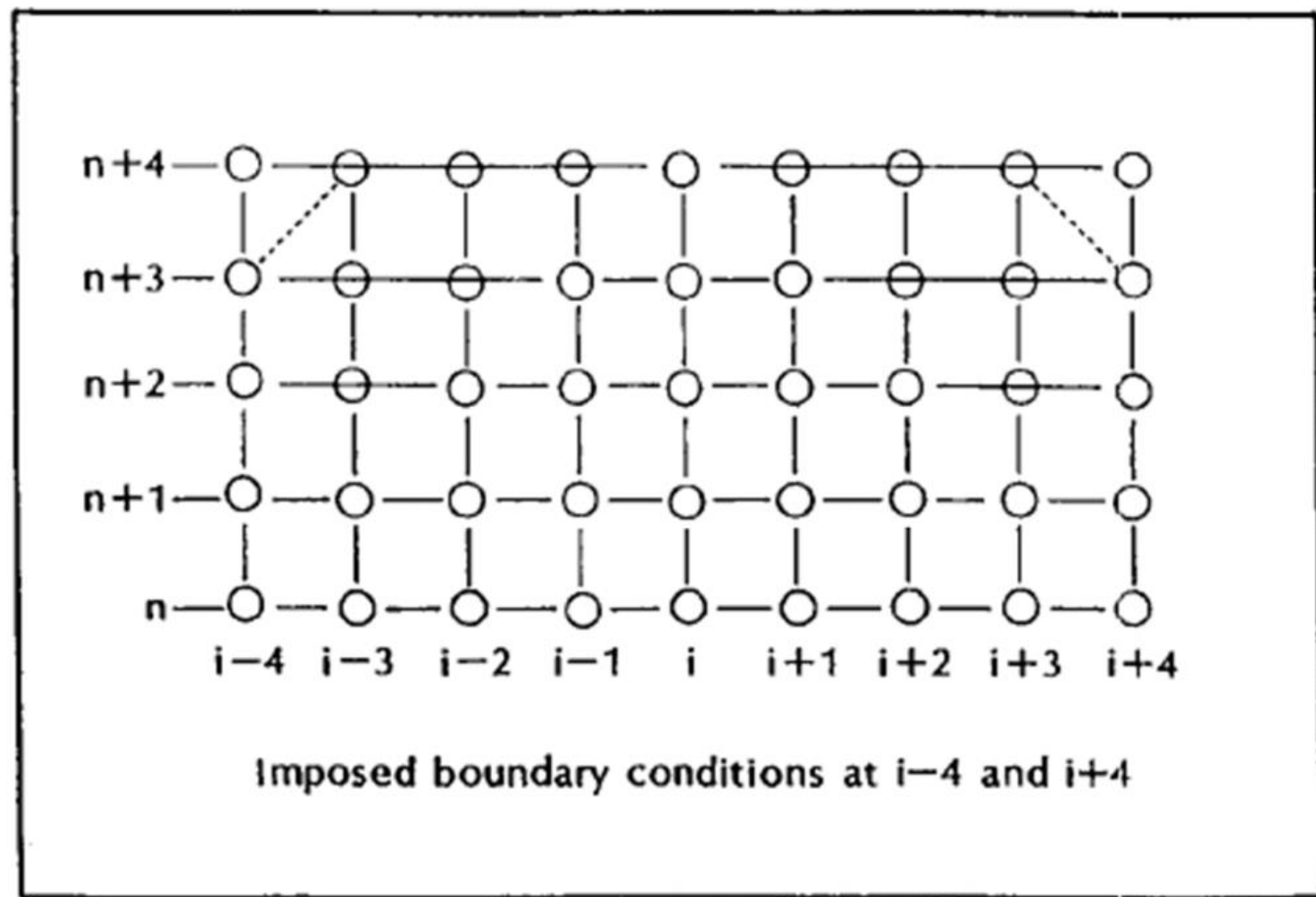


Figure 3-2. Effect of the boundary conditions for the explicit formulation.

فرمولاسیون ضمنی:

در این روش همه جملات در زمان $t + \Delta t$ تقریب زده می شوند به غیر از مشتق زمان که باید بر حسب تفاضل پسرو تقریب زده شود:

$$\frac{P_2^{t+\Delta t} - 3P_1^{t+\Delta t} + 2P_L}{\frac{3}{4}\Delta x^2} = \left(\frac{\phi\mu c}{k} \right) \frac{P_i^{t+\Delta t} - P_i^t}{\Delta t} \quad (i = 1)$$

$$\frac{P_{i+1}^{t+\Delta t} - 2P_i^{t+\Delta t} + P_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x^2} = \left(\frac{\phi\mu c}{k} \right) \frac{P_i^{t+\Delta t} - P_i^t}{\Delta t} \quad (i = 2, \dots, N-1)$$

$$\frac{2P_R^{t+\Delta t} - 3P_N^{t+\Delta t} + P_{N-1}^{t+\Delta t}}{\frac{3}{4}\Delta x^2} = \left(\frac{\phi\mu c}{k} \right) \frac{P_i^{t+\Delta t} - P_i^t}{\Delta t} \quad (i = N)$$

در این مورد، ما N معادله با N مجهول (N تعداد بلوک ها است) داریم که باید همزمان حل شوند. به منظور سادگی معادلات به شکل زیر نوشته می شوند:

$$\frac{P_{i+1}^{t+\Delta t} - 2P_i^{t+\Delta t} + P_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x^2} = \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \frac{P_i^{t+\Delta t} - P_i^t}{\Delta t} \quad (i = 2, \dots, N-1)$$

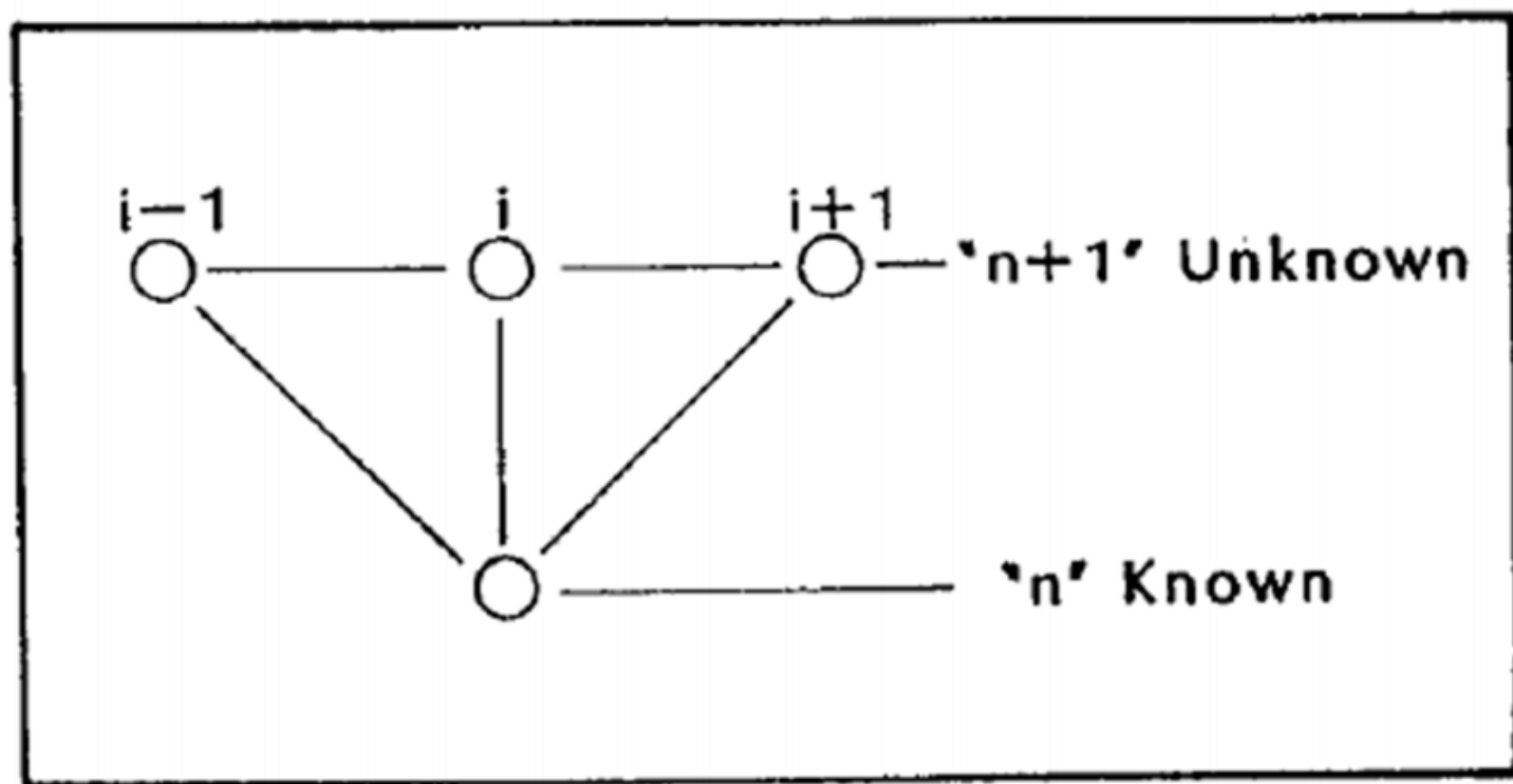


Figure 3-3. Grid points for the implicit formulation

$$a_i P_{i-1}^{t+\Delta t} + b_i P_i^{t+\Delta t} + c_i P_{i+1}^{t+\Delta t} = d_i, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\alpha = \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \left(\frac{\Delta x^2}{\Delta t} \right)$$

$$a_1 = 0$$

$$a_i = 1, \quad i = 2, \dots, N$$

$$b_1 = b_N = -3 - \frac{3}{4}\alpha$$

$$b_i = -2 - \alpha, \quad i = 2, \dots, N - 1$$

$$c_N = 0$$

$$c_i = 1, \quad i = 1, \dots, N - 1$$

$$d_1 = -\frac{3}{4}\alpha P_1^t - 2P_L$$

$$d_i = -\frac{3}{4}\alpha P_i^t, \quad i = 2, \dots, N - 1$$

$$d_N = -\frac{3}{4}\alpha P_N^t - 2P_R$$

دستگاه معادله خطی فوق را می توان برای فشار متوسط هر بلوک با روش حذفی گوس حل کرد.

فرمولاسیون Crank-Nicholson

همانطور که بیان شد، امکان نوشتن معادلات برای زمانی بین t و Δt وجود دارد. برای $t + \Delta t / 2$ معادله تفاضل برای بلوک i به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{P_{i+1}^{t+\frac{\Delta t}{2}} - 2P_i^{t+\frac{\Delta t}{2}} + P_{i-1}^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta x^2} = \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \frac{P_i^{t+\frac{\Delta t}{2}} - P_i^t}{\Delta t}$$

با توجه به اینکه فشارها در t و Δt تعریف شده اند، معادله بالا را نمی توانیم در شکلی که هست حل کنیم. لذا طرف چپ را به طور متوسط روش صریح و ضمنی در نظر می گیریم:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{P_{i+1}^t - 2P_i^t + P_{i-1}^t}{\Delta x^2} + \frac{P_{i+1}^{t+\Delta t} - 2P_i^{t+\Delta t} + P_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x^2} \right] = \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \frac{P_i^{t+\Delta t} - P_i^t}{\Delta t}$$

دستگاه معادله خطی حاصله به طور همزمان مانند روش ضمنی حل می شود.

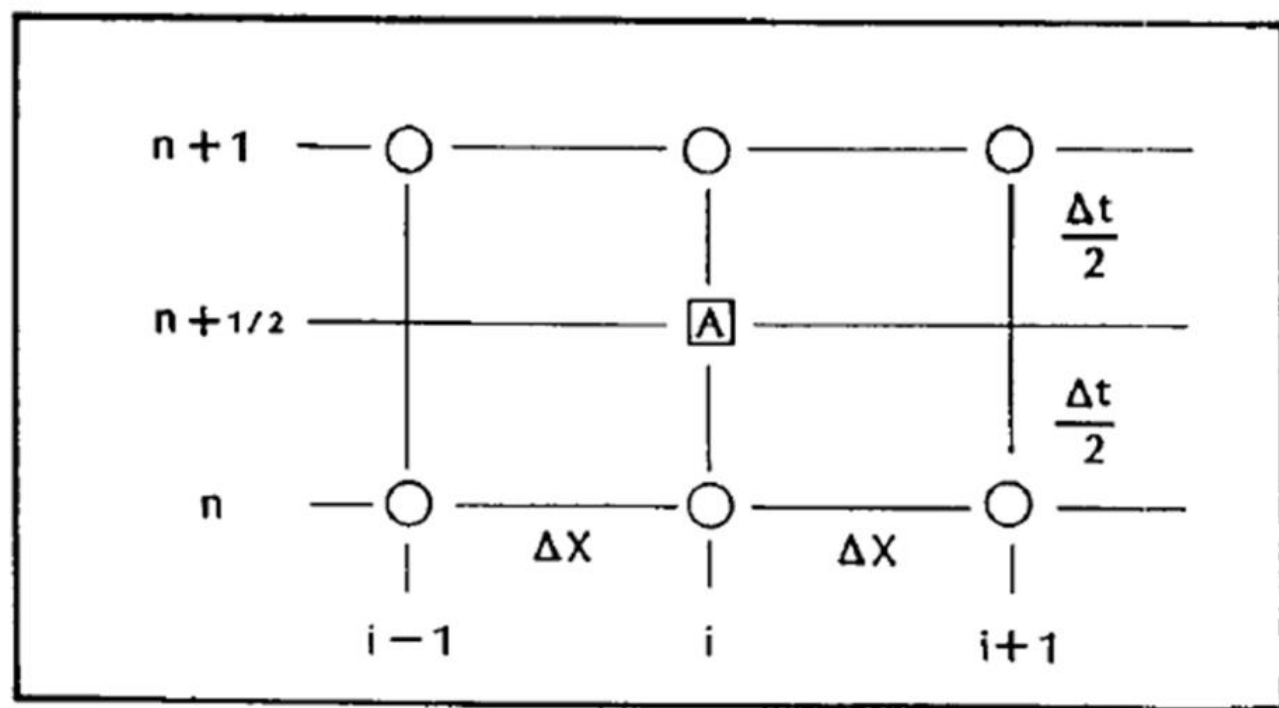


Figure 3-5. Grid points for the Crank-Nicolson implicit method.

$$\frac{1}{2} \left[\frac{P_{i+1}^t - 2P_i^t + P_{i-1}^t}{\Delta x^2} + \frac{P_{i+1}^{t+\Delta t} - 2P_i^{t+\Delta t} + P_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x^2} \right] = \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \frac{P_i^{t+\Delta t} - P_i^t}{\Delta t}$$

دستگاه معادله خطی حاصله به طور همزمان مانند روش ضمنی حل می شود.

بحث در روش‌های فرمولاسیون

به طور بدیهی استفاده از روش صریح ساده‌تر از روش ضمنی است. چه آنکه عبارت صریحی برای بدست آوردن مستقیم فشار بدست می‌آید. مرتبه خطای گسسته‌سازی برای هر دو روش یکی است. حال آنکه مقدار عملیات ریاضی مورد نظر برای روش صریح کمتر است. اگر چه برای حالت یک بعدی این مطلب ممکن است چندان مهم نباشد، اما برای موردهای 2D و 3D با افزایش تعداد بلوک‌ها، زمان محاسباتی برای هر گام زمانی برای دو روش بسیار متفاوت است. در هر صورت روش صریح به ندرت استفاده می‌شود. این روش برای گام‌های زمانی بزرگ ناپایدار است.

با استفاده از روش آنالیز پایداری von Neumann نشان داده می‌شود که روش صریح برای پایداری نیاز به شرط زیر دارد:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \Delta x^2$$

این شرط نشان می‌دهد که گام زمانی Δt بوسیله خواص سیال - سنگ و اندازه بلوک شبکه محدود می‌شود. این محدودیت با کوچکترین مقدار Δt برای یک بلوک خاص شدیدتر می‌شود. (یعنی آنکه Δt برای هر بلوک با توجه به رابطه فوق مقدار خاصی است و در این میان برای پایداری حل، Δt باید برابر با کوچکترین مقدار انتخاب شود.)

کاربرد روش آنالیز پایداری von Neumann نشان می‌دهد که روش ضمنی برای همه گام‌های زمانی بدون شرط پایدار است. در روش ضمنی، عملیات محاسباتی بیشتر برای هر گام زمانی مورد نیاز است که به طور معمول با افزایش Δt این مسئله را می‌توان تا حدی جبران کرد. البته Δt بزرگتر، منجر به خطای محاسباتی بیشتر هم می‌شود. بنابراین در هر حل عددی، باید بررسی شود که میزان خطای محاسباتی در حد قابل قبولی باشد.

آنالیز پایداری

آنالیز پایداری برای روش صریح

معادله تفاضل صریح به صورت زیر هم نوشته می شود:

$$\frac{P(x + \Delta x, t) - 2P(x, t) + P(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} = \alpha \frac{P(x, t + \Delta t) - P(x, t)}{\Delta t}$$

که

$$\alpha = \frac{\phi \mu c}{k}$$

در روش آنالیز پایداری von Neumann، فرض می شود که اگر $P(x, t)$ جوابی از معادله فوق باشد آنگاه $P(x, t) + \varepsilon(x, t)$ ، به عنوان اغتشاش در تابع فشار، نیز جوابی از معادله است. بنابراین، رابطه فوق به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\frac{\varepsilon(x + \Delta x, t) - 2\varepsilon(x, t) + \varepsilon(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} = \alpha \frac{\varepsilon(x, t + \Delta t) - \varepsilon(x, t)}{\Delta t}$$

فرض می شود که این تابع خطا به صورت $\varepsilon(x, t) = \psi(x, t) e^{i\beta x}$ باشد که در آن $i = \sqrt{-1}$.
بنابراین:

$$\varepsilon(x + \Delta x, t) = \psi(t) e^{i\beta(x + \Delta x)}$$

$$\varepsilon(x - \Delta x, t) = \psi(t) e^{i\beta(x - \Delta x)}$$

$$\varepsilon(x, t + \Delta t) = \psi(t + \Delta t) e^{i\beta x}$$

فرض می شود که این تابع خطا به صورت $\varepsilon(x, t) = \psi(x, t) e^{i\beta x}$ باشد که در آن $i = \sqrt{-1}$.
بنابراین:

$$\varepsilon(x + \Delta x, t) = \psi(t) e^{i\beta(x + \Delta x)}$$

$$\varepsilon(x - \Delta x, t) = \psi(t) e^{i\beta(x - \Delta x)}$$

$$\varepsilon(x, t + \Delta t) = \psi(t + \Delta t) e^{i\beta x}$$

با جاگذاری و ساده سازی و استفاده از تساوی زیر

$$e^{i\beta\Delta x} + e^{-i\beta\Delta x} - 2 = -4 \sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)$$

عبارت زیر به دست می آید:

$$\frac{\psi(t + \Delta t)}{\psi(t)} = \left[1 - \frac{4\Delta t}{\alpha\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right) \right]$$

می‌توان نسبت $\psi(t + \Delta t)/\psi(t)$ را به عنوان نسبت افزایش خطا در افزایش زمان به اندازه Δt ، تفسیر کرد. آشکارا، اگر این نسبت از یک بزرگتر باشد حل ناپایدار است. پس، عبارت زیر به عنوان معیار پایداری در نظر گرفته می‌شود:

$$\left| \frac{\psi(t + \Delta t)}{\psi(t)} \right| \leq 1$$

یا

$$\left| 1 - \frac{4\Delta t}{\alpha \Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{\beta \Delta x}{2} \right) \right| \leq 1$$

به دلیل آنکه

$$1 \geq \sin^2 \left(\frac{\beta \Delta x}{2} \right) \geq 0$$

شرط پایداری به قرار زیر می‌شود:

$$\frac{4\Delta t}{\alpha \Delta x^2} - 1 \leq 1 \qquad \Delta t \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi \mu c}{k} \right) \Delta x^2$$

با

آنالیز پایداری برای روش ضمنی

شکل ضمنی معادله تفاضل به گونه زیر است:

$$\frac{P(x + \Delta x, t) - 2P(x, t) + P(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} = \alpha \frac{P(x, t + \Delta t) - P(x, t)}{\Delta t}$$

به مثابه روش فوق، معادله زیر برای جمله خطا به دست می آید:

$$\frac{\varepsilon(x + \Delta x, t) - 2\varepsilon(x, t) + \varepsilon(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} = \alpha \frac{\varepsilon(x, t + \Delta t) - \varepsilon(x, t)}{\Delta t}$$

بار دیگر با فرض $\varepsilon(x, t) = \psi(x, t)e^{i\beta x}$ ، عبارت زیر برای نسبت خطا به دست می آید:

$$\frac{\psi(t + \Delta t)}{\psi(t)} = \frac{1}{1 + \frac{4\Delta t}{\alpha \Delta x^2} \sin^2\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right)}$$

با توجه به معیار پایداری، شرط پایداری به شکل زیر تبدیل می شود:

$$1 + \frac{4\Delta t}{\alpha \Delta x^2} \sin^2\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right) \geq 1$$

که همیشه درست است. در نهایت، شرط پایداری به شکل زیر ساده می شود:

$$\Delta t \leq \infty$$

آنالیز پایداری برای روش Crank – Nicholson

کاربرد روش آنالیز پایداری von Neumann نشان می دهد که روش Crank-Nicholson برای همه گام های زمانی،

مانند روش ضمنی بدون شرط پایدار است.

